ФГБОУ ВПО «Брянская государственная сельскохозяйственная академия»

Блохин В.Н.
Старовойтов С.И.
Лапик В.П.

СПРАВОЧНИК ПО ТЕОРИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Брянск 2012

УДК
ББК
Б

Блохин, В.Н. СПРАВОЧНИК ПО ТЕОРИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ/ В.Н. Блохин, С.И. Старовойтов, В.П. Лапик. – Брянск.: Издательство Брянской ГСХА, 2012. - 415 с.

Справочник по теоретической механике, полностью включает материал, предусмотренный программой для высших технических учебных заведений. Материал в справочнике изложен так, что им можно пользоваться при изучении теоритического курса, а также для решения задач. Материал справочника состоит из четырех частей: 1)статика, 2)кинематика, 3)динамика 4)ученые механики.

Расположение материала в книге соответствует общепринятым программам, используемым в большинстве вузов.

Рекомендован к изданию методической комиссией инженерно-технологического факультета от 22 мая 2012 г, протокол №9.

Предисловие

Книга представляет собой справочник по теоретической механике, который полностью включает материал, предусмотренный программой для высших технических учебных заведений. Материал в справочнике изложен так, что им можно пользоваться при изучении курса как по практикам, так и более полным программам. Материал справочника состоит из трех частей: 1)статика, 2)кинематика, 3)динамика.

Расположение материала в книге соответствует общепринятым программам, используемым в большинстве вузов.

Книга не претендует на роль учебника, поэтому доказательства, как правило, не приводятся. Ею удобно пользоваться для получения справочного материала (формулы, законы, теоремы, принципы) и ускоренного повторения пройденного материала при подготовке к экзаменам и зачетам.

В книге отведено большое место примерам и методам решения задач.

Справочник будет полезен для студентов, научных работников и преподавателей вузов. Для удобства изучения материала в приложении книги приведены таблицы математических формул. Подробное оглавление поможет читателю находить нужную информацию.

Латинский алфавит

Aa - а
Bb - бе
Cc - це
Dd - де
Ee - е
Ff - эф
Gg - же
Hh - аш
Ii - и
Jj - жи
Kk - ка
Ll - эль
Mm - эм
Nn - эн
Oo - о
Pp - пе
Qq - ку
Rr - эр
Ss - эс
Tt - тэ
Uu - у
Vv - ве
Ww - дубль-ве
Xx - икс
Yy - игрек
Zz - зет

Греческий алфавит

Αα - альфа
Ββ - бета
Γγ - гамма
Δδ - дельта
Εε - эпсилон
Ζζ - дзета
Ηη - эта
Θϑθ - тэта
Ιι - йота
Κκ - каппа
Λλ - лямбда
Μμ - мю
Νν - ню
Ξξ - кси
Οο - омикрон
Ππ - пи
Ρρ - ро
Σσ - сигма
Ττ - тау
Υυ - ипсилон
Φφ - фи
Χχ - хи
Ψψ - пси
Ωω - омега

Размерности механических величин

Механическая величина	обозначение	Единицы измерения	
		Физическая	Техническая
		$м \cdot кг \cdot с$	$м \cdot кг \cdot с$
Длина	l	метр (м)	метр (м)
Масса	m	килограмм (кг)	$кг \cdot с^2 / м$
Время	t	секунда (с)	секунда (с)
Сила	F	ньютон (Н)	килограмм (кг)
Вес	G	ньютон (Н)	килограмм (кг)
Плоский угол	φ	радиан (рад)	радиан (рад)
Угловая скорость	ω	$рад / с$; $\frac{1}{с}$; $с^{-1}$	$рад / с$; $\frac{1}{с}$; $с^{-1}$
Угловое ускорение	ε	$рад / с$; $\frac{1}{с^2}$; $с^{-2}$	$рад / с$; $\frac{1}{с^2}$; $с^{-2}$
Скорость точки	V	м/с	см/с; м/с; км/час; м/$с^2$
Ускорение точки	a	м/$с^2$	м/$с^2$
Момент силы	M	Ньютон Метр $(Н \cdot м)$	Килограмм Метр $(кг \cdot м)$
Импульс силы	S	Ньютон Секунда $(Н \cdot с)$	Килограмм Секунда $(кг \cdot с)$
Количество движения	Q	Килограмм Скорость $кг \cdot м / с$	Килограмм Скорость $кг \cdot м / с$
Момент количеств. движения	К	$\frac{кг \cdot м^2}{с}$	$\frac{кг \cdot м^2}{с}$
Кинетическая энергия	T	Джоуль (дж) $кг \cdot \frac{м^2}{с^2}$	Килограммометр $кг \cdot м$
Работа силы	A	Джоуль (дж) $кг \cdot \frac{м^2}{с^2}$	Килограммометр $кг \cdot м$
Мощность	N	$Ватт$ (вт); $\frac{кг \cdot м^2}{с^3}$	$\frac{кг \cdot м}{с}$
Момент инерции	J	$кг \cdot м^2$	$кгм \cdot м \cdot с^2$
Центробежный момент инерции	Jxy	$кг \cdot м^2$	$кгм \cdot м \cdot с^2$

Терминологический минимум

Автоколебания

Аксиомы (принципы) статики

Апериодическое движение

Абсолютное движение

Абсолютно упругий удар

Абсолютно неупругий удар

Амплитуда колебаний

Амплитуда колебаний вынужденных

Аналогии электродинамические

Афелий

Бинормаль

Ватт

Вектор главный системы сил

Вектор главный сил инерции

Вектор свободный

Вектор скользящий

Вес тела

Взаимодействие механическое

Винт динамический

Виртуальная работа

Вращение тела равномерное

Вращение тела равнопеременное

Вращение собственное

Вращательное движение

Время удара

Время установления колебаний

Вторая задача динамики

Возмущающая сила

Восстанавливающая сила

Вынужденные колебания

Гармонические колебания

Геометрия масс

Гироскоп

Гироскопический эффект

Задача краевая
Задача статистически неопределенная
Задача статистически определенная
Задачи динамики
Заделка жесткая
Закон движения
Закон динамики второй (основной)
Закон динамики первый (закон инерции)
Закон движения третий (о равенстве действия и противодействия)
Закон независимости действия
Закон параллелограмма сил
Закон площадей
Закон сохранения главного момента количеств движения
Закон сохранения движения центра масс
Закон сохранения количества движения
Закон сохранения механической энергии
Законы динамики
Законы Ньютона
Законы трения скольжения
Затухающие колебания
Идеальные связи
Импульс силы
Импульс силы элементарный
Импульс ударный
Инертность
Инерционный коэффициент
Интенсивность нагрузки
Квазиупругий коэффициент
Киловатт-час
Кинематика
Кинематика твердого тела
Кинетическая энергия
Кинетический момент
Кинетический потенциал
Колебания тел

Колебания точки вынужденные

Колебания точки гармонические

Колебания главные

Колебания затухающие

Колебания линейные

Колебания нелинейные

Колебания параметрические

Колебания свободные при отсутствии сопротивления

Колебания системы с двумя степенями свободы малые

Колебания системы с одной степенью свободы малые

Колебания собственные

Количество движения

Количество движения жидкости секундное

Координаты обобщенные

Консервативная система

Конус трения

Коэффициент восстановления при ударе

Коэффициент динамичности

Коэффициент жесткости обобщенный

Коэффициент жесткости пружины

Коэффициент затухания

Коэффициент инерционный

Коэффициент квазиупругий

Коэффициент трения качения

Коэффициент трения скольжения

Коэффициент сопротивления

Коэффициенты формы

Краевые условия

Кривизна траектории

Круговая частота

Линия действия силы

Линия тока

Линия узлов

Малые колебания

Масса

Масса гравитационная

Масса инертная

Материальная точка

Маятник математический

Маятник оборотный

Маятник физический

Мгновенный центр скоростей

Мгновенный центр ускорения

Мгновенная ось вращения

Метод вырезания узлов

Метод остановки (метод Виллиса)

Метод сечений (метод Риттера)

Механика

Механика теоретическая (общая)

Механическая энергия

Механическое взаимодействие

Многоугольник силовой

Момент вращающий

Момент гироскопический

Момент главный системы сил

Момент главный сил инерции

Момент инерции осевой

Момент инерции относительно оси

Момент инерции центробежный

Момент кинетический

Момент количества движения жидкости секундный

Момент количества точки

Момент количеств движения системы главный

Момент пары сил

Момент силы относительно оси

Момент силы относительно точки (центра)

Момент силы относительно точки (центра) алгебраический

Моменты инерции главные

Моменты инерции относительно параллельных осей

Момент центробежный

Мощность

Начальная скорость

Начальные условия

Начальная фаза

Невесомость

Нормаль главная

Неголономные связи

Несвободное тело

Неустойчивое равновесие

Нутация

Ньютон (единица измерения)

Обобщенные координаты

Обобщенный коэффициент жесткости

Обобщенные силы

Обобщенная скорость

Общее уравнение динамики

Осевой момент инерции

Оси вращения

Оси естественного трехгранника

Оси инерции главные

Оси инерции центральные

Ось винтовая мгновенная

Ось вращения

Ось вращения мгновенна

Отклонение статическое

Относительное движение

Относительная скорость

Относительное ускорение

Пара вращений

Пара гироскопическая

Пара сил

Пара угловых скоростей

Первая задача динамики

Перемещение возможное (виртуальное)

Переносное движение

Переносная скорость

Переносное ускорение

Период колебаний

Переменная масса

Перигелий

Период колебаний

Период колебаний затухающих

Платформа Жуковского

Плечо силы

Плоское движение

Поле тяжести

Положение устойчивого равновесия

Поступательное движение

Потенциальная сила

Потенциальная энергия

Потеря кинетической энергии

Прецессия

Прецессия гироскопа

Прецессия гироскопа регулярная

Приведение сил инерции

Приведение системы сил к данному центру

Принцип возможных перемещений

Принцип Даламбера

Принцип Даламбера-Лагранжа

Принцип отвердевания

Принцип относительности классической механики

Принципы механики

Проекция вектора

Проекция силы на ось

Проекция силы на плоскость

Произведения инерции

Прямой центральный удар двух тел

Работа возможная

Работа потенциальной силы

Работа сил, приближенных к вращающемуся телу

Работа силы

Работа силы трения

Работа силы трения действующей на катящееся тело

Работа силы тяготения

Работа силы тяжести

Работа силы упругости

Работа силы элементарная

Равновесие

Равновесие абсолютное

Равновесие механической системы

Равновесие относительное

Равновесие при наличии трения

Равновесие при наличии трения предельное

Равновесие плоской системы сил

Равновесие пространственной системы сил

Равновесие системы сходящихся сил

Равновесие системы тел

Равнодействующая сила

Равнодействующая системы сил

Радиус-вектор

Радиусы инерции

Радиус кривизны

Разложение сил

Размерность величины

Распределенная нагрузка

Расход жидкости секундный

Расход топлива секундный

Реакции динамические, действующие на ось вращающегося тела

Реакция динамическая

Реакция связи

Резонанс

Результирующая сила

Самоторможение

Связи

Связи идеальные

Свободное тело

Свободные колебания

Сдвиг фаз

Сила

Сила активная

Сила аэродинамического сопротивления

Сила внешняя

Сила внутренняя

Сила возмущающая

Сила возмущающая гармоническая

Сила восстанавливающая

Сила вязкого трения

Сила давления

Сила диссипативная

Сила инерции

Сила инерции кориолисова

Сила инерции обобщенная

Сила инерции переносная

Сила инерции центробежная

Сила массовая

Сила непотенциальная

Сила обобщенная

Сила обобщенная активная

Сила объемная

Сила поверхностная

Сила потенциальная

Сила распределенная

Сила реактивная

Сила сопротивления аэродинамического (гидродинамического)

Сила сосредоточенная

Сила сцепления

Сила трения предельная

Сила трения скольжения

Сила тяготения

Сила тяжести

Скорость прецессии угловая

Скорость тела угловая

Скорость тела угловая мгновенная

Скорость точки

Скорость точки абсолютная

Скорость точки в полярных координатах

Скорость точки, ее числовое (алгебраическое) значение

Скорость точки линейная (окружная)

Скорость точки относительная

Скорость точки переносная

Скорость точки поперечная

Скорость точки радиальная

Скорость точки секторная

Скорость точки средняя

Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Сложение пар сил

Сложение поступательных движений

Сложение сил

Сложение скоростей точки

Сложение угловых скоростей

Сложение угловых ускорений

Сложение ускорений точки

Сложное движение

Собственная частота

Сосредоточенная сила

Составляющая вектора

Сочлененная система тел

Сохранение механической энергии

Спутники Земли искусственные

Статика

Статическая неопределенность

Степень свободы

Твердое тело

Тело абсолютно твердое

Трение

Трение качения

Трение скольжения

Угловая скорость

Угловое ускорение

Углы Эйлера

Угол нутации

Угол прецессии

Угол смежности

Угол собственного вращения

Угол трения

Удар

Удар абсолютно неупругий

Удар абсолютно упругий

Удар косой

Удар по вращающемуся телу

Удар прямой

Удар тела о неподвижную преграду

Удар центральный

Удар шаров

Уравнение динамики общее

Уравнение Мещерского

Уравнение теории удара основное

Уравнение частот

Уравнение Эйлера турбинное

Уравнения движения системы дифференциальные

Уравнения движения системы дифференциальные в обобщенных координатах

Уравнения движения точки дифференциальные

Уравнения Лагранжа

Уравнения Эйлера динамические

Уравнения Эйлера кинетические

Усилия внутренние

Ускорение

Ускорение Кориолиса

Ускорение свободного падения

Ускорение силы тяжести

Ускорение тела угловое

Ускорение точки

Ускорение точки абсолютное

Ускорение точки вращательное

Ускорение точки касательное

Ускорение точки кориолисово

Ускорение точки нормальное

Ускорение точки осестремительное

Ускорение точки относительное

Ускорение точки переносное

Ускорение точки поворотное

Условия краевые

Условия начальные

Условия равенства динамических реакций статическим

Условия равновесия системы в обобщенных координатах

Устойчивость равновесие

Фаза колебаний

Фаза колебаний начальная

Ферма

Формула Галилея

Формула Циолковского

Формулы Эйлера

Функция Лагранжа

Функция силовая

Центр вращения мгновенный

Центр инерции

Центр качаний физического маятника

Центр масс

Центр параллельных сил

Центр приведения

Центр скоростей мгновенный

Центр тяжести

Центр удара

Центр ускорений мгновенный

Центроида неподвижная

Центроида подвижная

Циклическая частота

Частота возмущающей силы

Частота вращения

Частота колебаний

Частота собственная

Число степеней свободы

Число Циолковского

Шарнирно-сочлененное тело

Эвклидово пространство

Элементарная работа

Элементарный импульс

Энергия кинетическая

Энергия механическая полная

Энергия потенциальная

Эффект гироскопический

Часть первая

Статика

1. Основные понятия и определения статики

1.1. Статикой называется раздел механики, в котором рассматривают учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, к которым приложены действующие силы.

1.2. Сила – величина векторная, представляющая собой меру механического действия одного тела на другое и определяется:

а) числовым значением или модулем силы,

б) направление силы,

в) точкой приложения силы.

В механике силу изображают в виде вектора (рис.1) и обозначают какой-либо буквой латинского алфавита с чертой и стрелкой над ней (например, $\overline{F}, \vec{P}$). Прямую n-n, вдоль которой действует сила, называют линией ее действия. Модуль силы обозначают символ $\left|\overline{F}\right|$ или той же буквой, но без черты над нею (F).

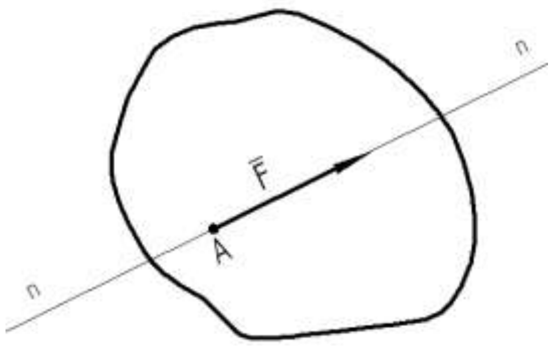


Рис.1

1.3. Системой сил называется совокупность сил, приложенных к твердому телу.

1.4. Плоская система сил - это система, линии действия которой лежат в одной плоскости.

1.5. Пространственная система сил - это система, линии действия которой расположены в пространстве.

1.6. Система сходящихся сил – это система сил, линии действия которых проходят через одну точку (рис.2).

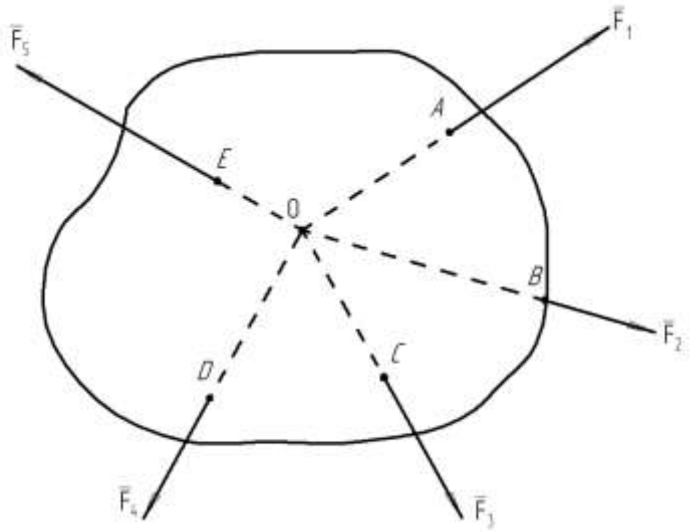


Рис.2

1.7. Система произвольно расположенных сил – это система, линии действия которых произвольно направлены и не пересекаются в одной точке.

1.8. Система параллельных сил - это система сил, линии действия которой параллельны друг другу.

1.9. Свободное тело – это тело, свобода движения которого в пространстве ничем не ограничена.

1.10. Несвободным телом называется такое тело, свобода движения которого ограничена другими телами.

1.11. Эквивалентные системы сил – это системы сил, заменяющие друг друга при действии на твердое тело, не меняя его кинематическое состояние.

1.12. Кинематическое состояние тела – это состояние покоя или движения тела, при котором точки тела имеют некоторые скорости и ускорения.

1.13. Уравновешивающей или эквивалентной нулю системой сил называется такая система, которая, действуя на свободное тело, не меняет его кинематическое состояние.

1.14. Равнодействующей данной системы сил называется сила, эквивалентная этой системе сил.

1.15. Уравновешивающей силой называется такая сила, которая равна по модулю равнодействующей, прямо противоположна по направлению и действует вдоль той же прямой.

1.16. Абсолютно твердым телом называется совокупность материальных точек, расстояние между которыми всегда остается постоянным.

1.17. Внешними силами называются силы, которые действуют на тело (или на тела) со стороны других тел.

1.18. Внутренними силами называются силы, с которыми части данного тела(или системы тел) действуют друг на друга.

1.19. Сосредоточенной силой называется такая сила, которая приложена к телу в какой-нибудь одной его точке.

1.20. Распределенными силами называются такие силы, которые действуют на все точки данной линии, поверхности или объема тела.

1.21. Моменты сил.

Моментом силы $\overline{F}$ относительно центра О называется вектор $\overline{m_0}(\overline{F})$, приложенный в центре О, модуль которого равен произведению модуля силы F на плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр О и силу, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра О против хода часовой стрелки (рис.3)

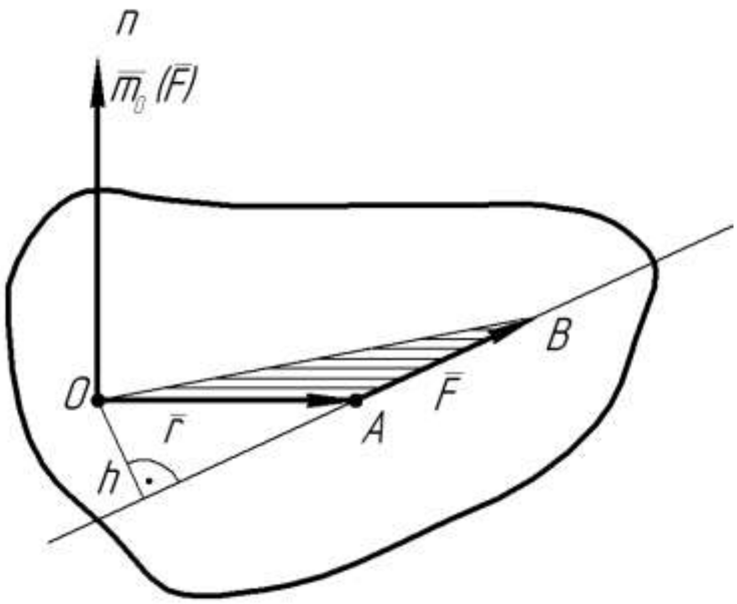


Рис.3

$$\overline{m_0}(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$

$\overline{m_0}(\overline{F}) = F \cdot h = 2пл.\Delta OAB$

Единицей измерения служит ньютон-метр ($H \cdot м$). Если силу перенести по линии ее действия, то момент силы относительно того же центра не изменяется.

Моментом силы $\overline{F}$ относительно оси z называется скалярная величина $m_z(\overline{F})$, равная проекции на эту ось вектора момента силы относительно любого центра, лежащего на этой оси.

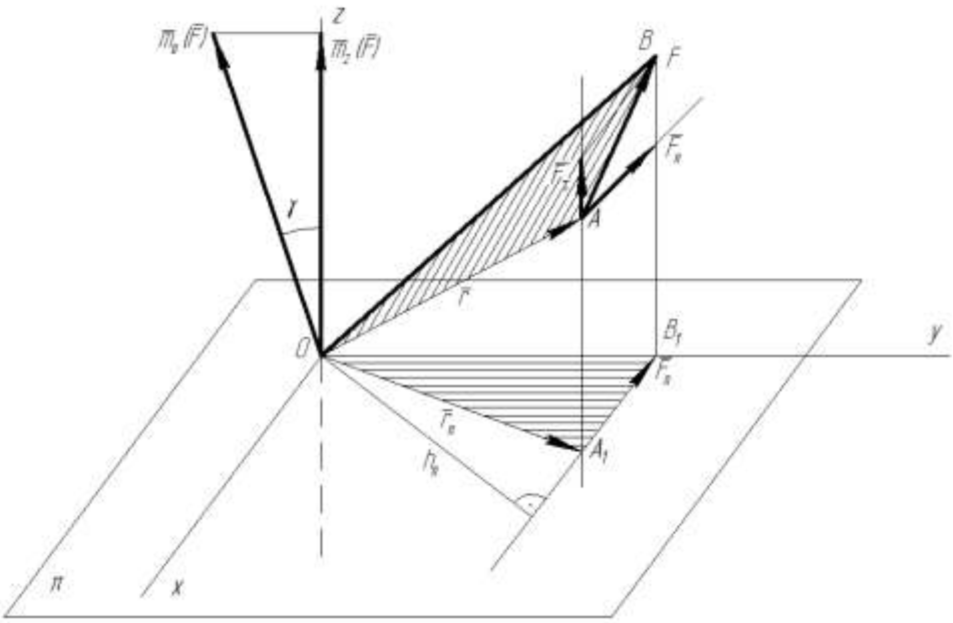


Рис.4

$$\overline{m}_z = (\overline{F}) = \bar{r}_n \times \overline{F}_n;$$

$$m_z(\overline{F}) = \pm F_n \cdot h_n;$$

$$m_z(\overline{F}) = m_0(\overline{F}) \cos\gamma;$$

Угол γ - угол между плоскостями треугольников.

Для вычисления момента F относительно оси z необходимо:

1.Провести любую плоскость π, перпендикулярно оси z, и отметить точку О, где они пересекаются (рис.4);

2. Найти силу $\overline{F}_n$ - проекцию силы на плоскость;

3. Найти абсолютное значение момента вектора $\overline{F}_n$ относительно центра О, учитывая знак.

Момент силы относительно оси не изменяется, если силу перенесите по линии ее действия.

Момент силы $\overline{F}$ относительно начала системы координат О и моменты силы относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$\overline{m}_0(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = m_x(\overline{F}) \cdot \bar{i} + m_y(\overline{F}) \bar{j} + m_z(\overline{F}) \cdot \bar{k}, \qquad 1.1$$

$$m_x(\overline{F}) = y \cdot F_z - z \cdot F_y, \qquad 1.2$$

$$m_y(\overline{F}) = z \cdot F_x - x \cdot F_z, \qquad 1.3$$

$$m_z(\overline{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x. \qquad 1.4$$

где F_x, F_y, F_z - проекции силы на координатные оси,

x, y, z - координаты точки приложения силы (координаты точки А)

1.22. Главным вектором системы сил $\{\overline{F}_k\}$ называется вектор $\overline{R}$, равный геометрической сумме всех сил системы:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

1.23. Главным моментом системы сил относительно центра О называется вектор $\overline{M}_0$, равный геометрической сумме векторов моментов всех вил, относительно центра О:

$$\overline{M}_0 = \sum_{R=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F_k}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_{ko} \times \overline{F}_k .$$

1.24 Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

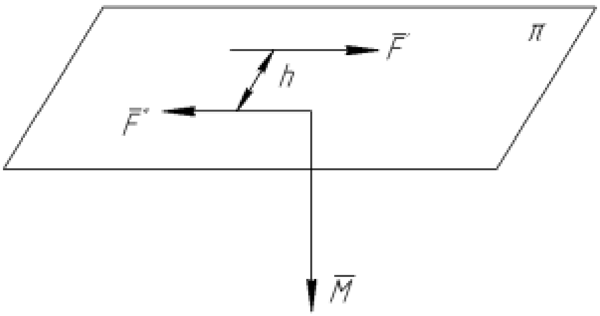


Рис.5

Пару сил обозначают ($\overline{F'}, \overline{F''}$)

Кратчайшее расстояние h между линиями действия сил пары называется плечом.

Плоскость π, проходящая через линии действия, сил пары называется <u>плоскостью действия пары.</u>

Действие пары мл на твердое тело сводится к некоторому вращательному эффекту, которой характеризуется величиной, называемой <u>моментом пары</u>. Главный момент не зависит от выбора центра и является мерой механического действия на твердое тело.

$$M = \pm F' \cdot h = \pm F'' \cdot h$$

Знак «плюс» берут в случае, если пара сил стремится вращать плоскость своего действия против хода часовой стрелки, а «минус» - если наоборот.

Моментом пары сил называется вектор $\overline{M}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара сил стремится повернуть тело против хода часовой стрелки (рис.5).

Таким образом, момент пары сил характеризуется:

1) его модулем, равным $F \cdot h$;
2) положением плоскости действия пары в пространстве;
3) направлением вектора $\overline{M}$ момента пары.

Две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны.

Свойства пары сил:

1) пару, не изменяя оказываемого ею действия на абсолютно твердое тело, можно переносить в плоскости действия пары куда угодно;
2) у данной пары, не изменяя ее действия на твердое тело, можно произвольно менять модули сил и размер плеча, сохраняя при этом неизменным ее момент;
3) пару, не изменяя ее действия на твердое тело, можно переносить в любую параллельную плоскость из данной плоскости действия пары.

2. Аксиомы статики

Аксиомы статики представляют собой законы окружающей нас действительности, которые были установлены людьми опытным путем и подтверждены многовековой практикой.

Рассмотрим основные аксиомы статики (законы Галилея-Ньютона).

2.1. Аксиома 1. (Закон инерции)

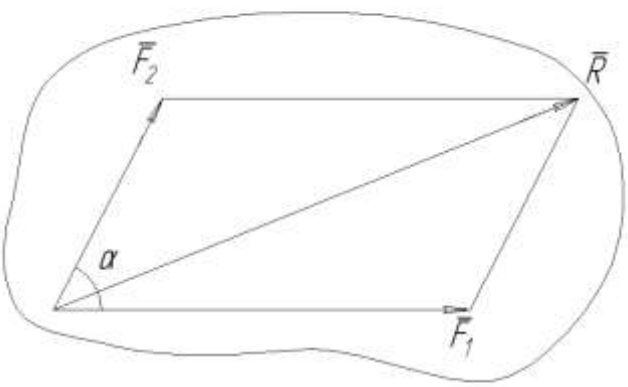
Материальная точка (тело) находится в покое или совершает равномерное прямолинейное движение, если на нее действует уравновешенная система сил.

2.2. Аксиома 2. Твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

2.3. Аксиома 3. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не измениться, если к ней присоединить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

2.4. Аксиома 4. (Закон параллелограмма сил)

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке твердого тела, является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (рис.6)



$$\overline{\mathrm{R}} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

Рис.6

Вектор $\overline{R}$ - геометрическая сумма векторов

$\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Модуль этой равнодействующей определяется

по теореме косинусов:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$$

2.5. Аксиома 5. (Закон равенства действия и противодействия)

Два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению.

Этот закон является одним из основных законов механики.

Взаимодействие тел может быть как контактным, (рис.7,а) так и на расстоянии (рис.7,б)

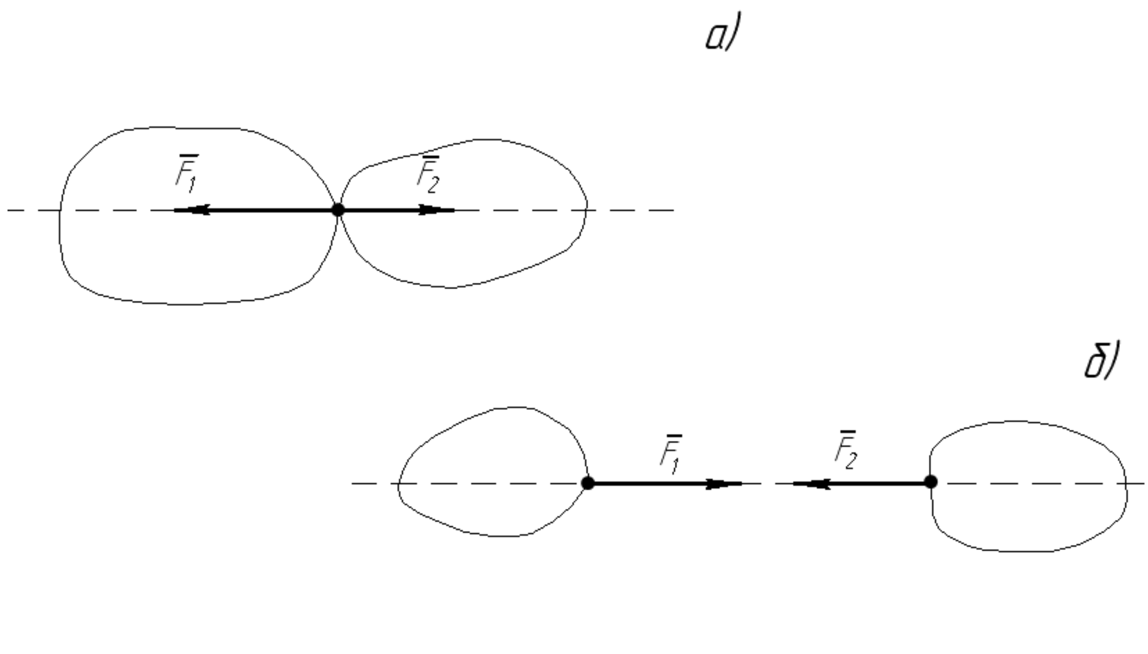


Рис.7

2.6. Аксиома 6. (Принцип отвердевания)

Равновесие деформируемого тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушается, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

3. Связи и реакции связей.

Тела, ограничивающие перемещение рассматриваемого тела в пространстве, называются связями (механическими).

Силы, с которыми данные связи действуют на тело, препятствуя его перемещению в любом направлении, называются силами реакции связей или просто реакциями связей.

Направлены силы реакции связей в сторону, противоположную той, куда связи не дают перемещаться телу.

При решении задач важную роль играет правильное направление сил реакций связей.

1. Гладкая поверхность (плоскость)

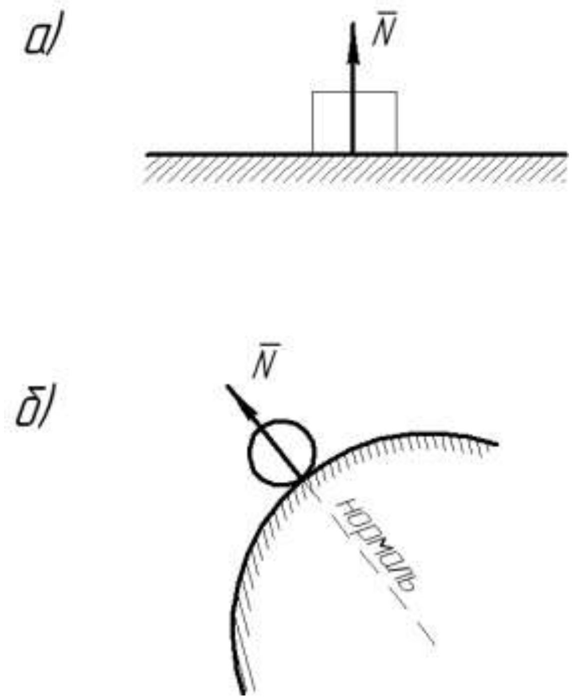


Рис.8

Реакция $\overline{N}$ гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке (рис.8)

2. Гибкая связь (нить, канат, трос, цепь).

Реакция $\overline{T}$ гибкой связи направлена вдоль связи от удерживаемого тела к точке подвеса (рис.9)

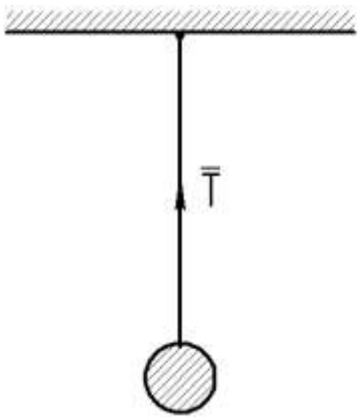


Рис.9

3. Неподвижный цилиндрический шарнир. Реакция $\overline{R}$ цилиндрического шарнира

может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (рис.10).

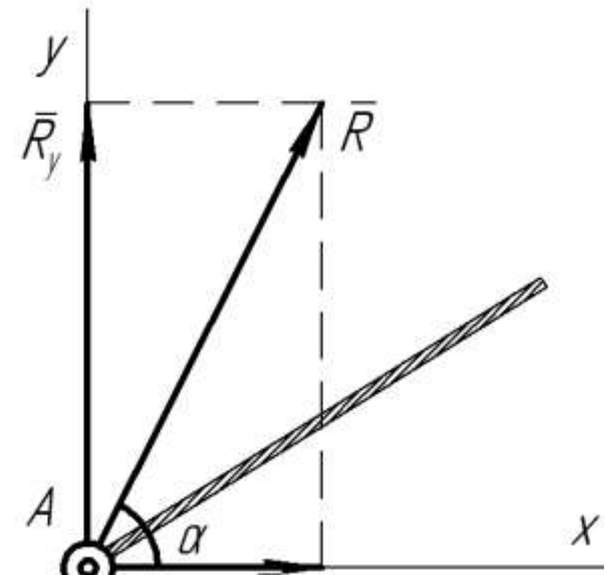
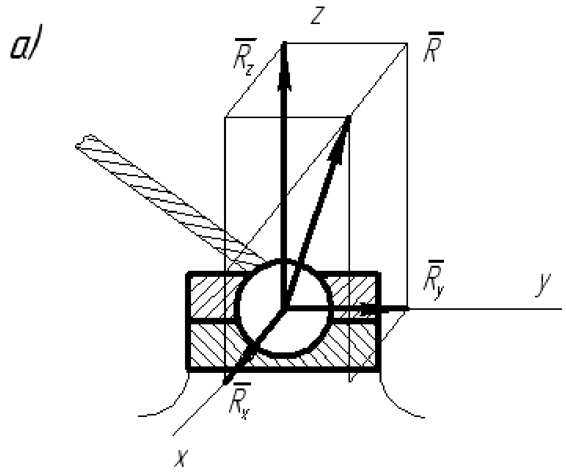


Рис.10

При решении задач удобно силу реакции $\overline{R}$, неизвестную ни по модулю R, ни по направлению, разлагать на две составляющие $\overline{R}_x$ и $\overline{R}_y$, направленные по осям координат на A_x и A_y: $\overline{R} = \overline{R}_x + \overline{R}_y$; $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$;

4. Сферический шарнир и подпятник (рис.11)



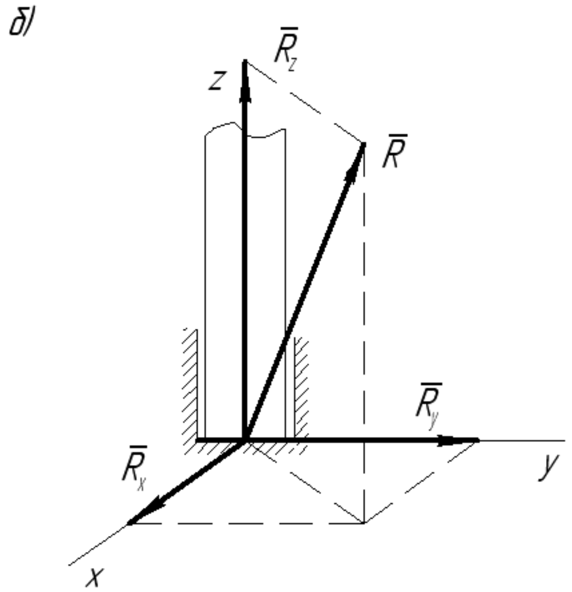


Рис.11

Реакция $\overline{R}$ сферического шарнира (рис.11,а) и подпятника (рис.11,б) может иметь любое направление в пространстве.

При решении задач реакцию $\overline{R}$ раскладывают на три взаимно перпендикулярные составляющие $\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{R}_z$ и по найденным составляющим подсчитывают модуль реакции $\overline{R}$, а также углы, которые реакция составляет с осями координат:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R},\ \cos\beta = \frac{R_y}{R},\ \cos\gamma = \frac{R_z}{R};$$

5. Невесомый стержень.

Невесомым называют стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь (рис.12).

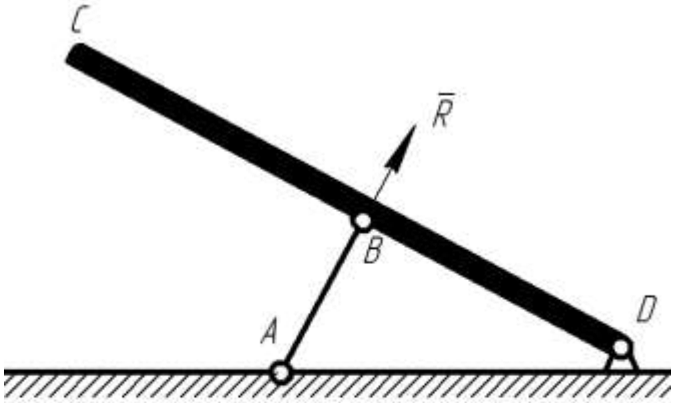


Рис.12

АВ – тонкий стержень. На тонкий стержень будут действовать две силы, приложенные в точках А и В. Если балка СД находится в равновесии, то эти две силы должны быть направлены вдоль прямой АВ. Согласно аксиоме действия и противодействия тонкий стержень АВ с шарнирами на концах будет действовать на тело СД с силой, направленной вдоль АВ. Следовательно, реакция $\overline{R}$ невесомого стержня АВ с шарнирами на концах будет направлена вдоль стрежня, сжимая или растягивая его.

6. Подвижный цилиндрический шарнир (катковая опора).

Цилиндрический шарнир представляет собой втулку с осью. Если втулка закреплена на подвижной опоре с катками, то давление оси на втулку заставляет такую конструкцию перемещаться по поверхности качения. Значит сила реакции $\overline{R}$ (сила, с которой ось давит на втулку) принимают направленной перпендикулярно к плоскости качения (рис.13).

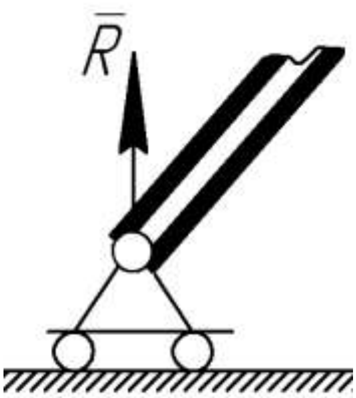


Рис.13

7. Негладкая поверхность

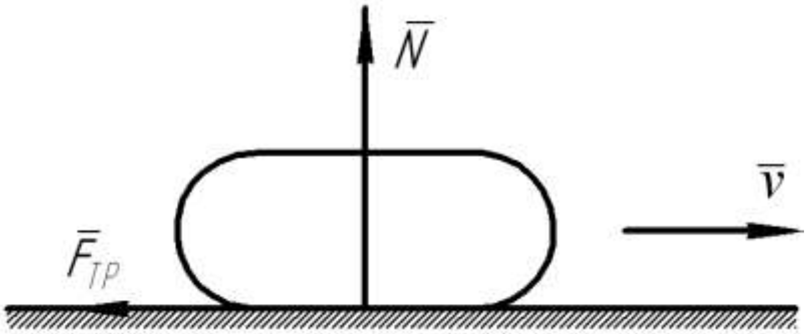


Рис.14

При перемещении тела по негладкой поверхности возникает сила трения $\overline{F}_{mp}$, которая в дополнение к нормальной реакции $\overline{N}$ относят к горизонтальной реакции поверхности (рис.14).

8. Жесткая заделка балки.

На заделанный конец балки в стену в ее поперечном сечении действует со стороны заделанного конца система распределенных сил (реакций). Если считать эти силы приведенными к центру С, то можно их заменить одной неизвестной силой $\overline{R}_c$, приложенной в этой точке, и парой с неизвестными моментом M_c. Для решения задач силу $\overline{R}_c$ удобно разложить на ее составляющие $\overline{x}_c$ и $\overline{y}_c$ (рис.15).

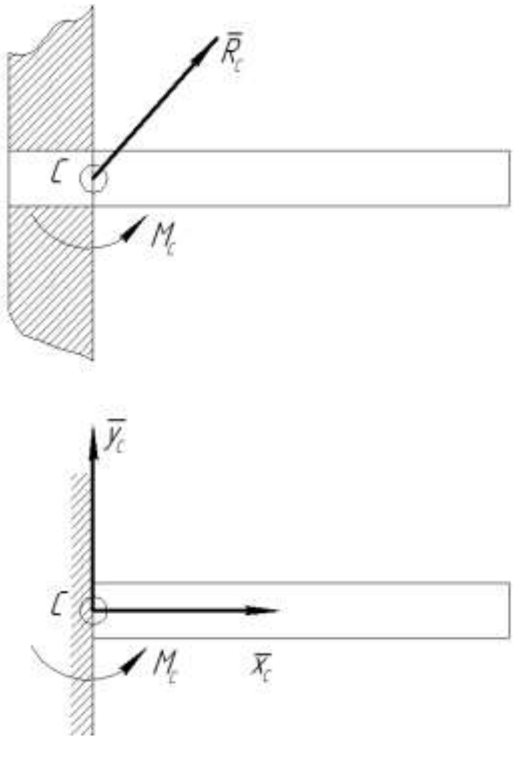


Рис.15

Для определения реакций жесткой заделки надо найти три неизвестных величины $X_c, У_c, M_c$.

9. Скользящая заделка.

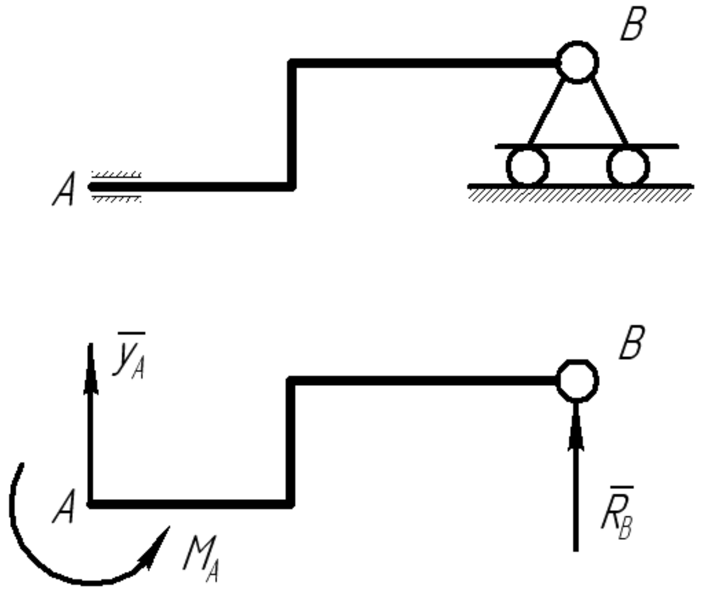


Рис.16

Скользящая заделка A это такое шарнирное соединение оси с втулкой, при котором ограничивается поперечный поворот оси в любой плоскости.

В этом случае на ось со стороны втулки действует неизвестная сила реакции $\overline{У}_A$ перпендикулярная оси и пара сил с неизвестным моментом M_A (рис.16). Таким образом, для определения реакции скользящей заделки, надо найти две неизвестные наперед заданные величины $\overline{У}_A, M_A$.

10. Бискользящая заделка

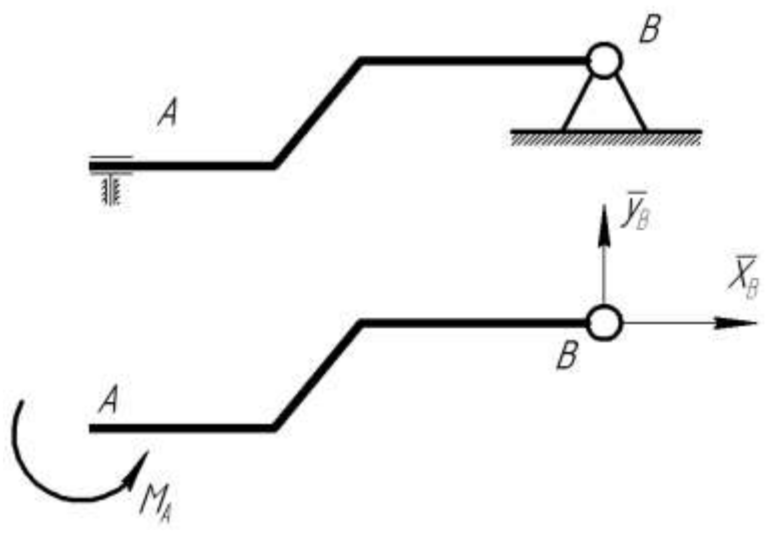


Рис.17

Бискользящая заделка А это такое соединение двух тел (оси и втулки), при котором одно тело не может вращаться относительно другого в плоскости действия сил и пар сил. В этом случае на втулку со стороны оси действует лишь одна неизвестная реакция пара сил с моментом M_A (рис.17).

4. Сложение сил.

4.1. Сложение двух сил

Геометрическая сумма $\overline{R}$ двух сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ находится по правилу параллелограмма (рис.18, а) или построением силового треугольника (рис.18, б).

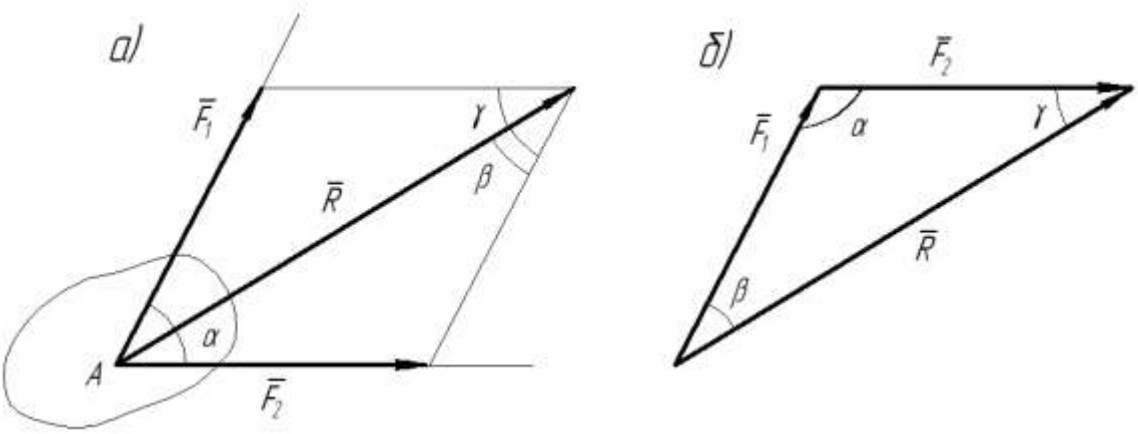


Рис.18

$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$; модуль силы $\overline{R}$ определяется $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$ или

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha}$$ (рис.б)

4.2. Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости.

Геометрическая сумма $\overline{R}$ трех сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ не лежащих в одной плоскости, определяется как диагональ параллелепипеда, построенного на этих силах, как на сторонах (правило параллелепипеда) (рис.19)

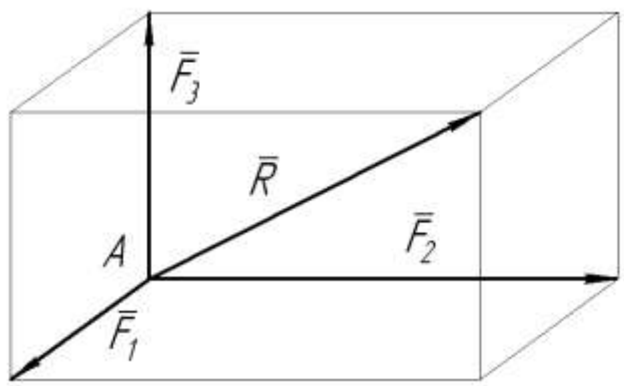


Рис.19

4.3. Сложение системы сил

Для любой системы (рис.20,а) сил главный вектор определяется последовательным сложением или системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника этот

способ является более простым и удобным (рис.20,б)

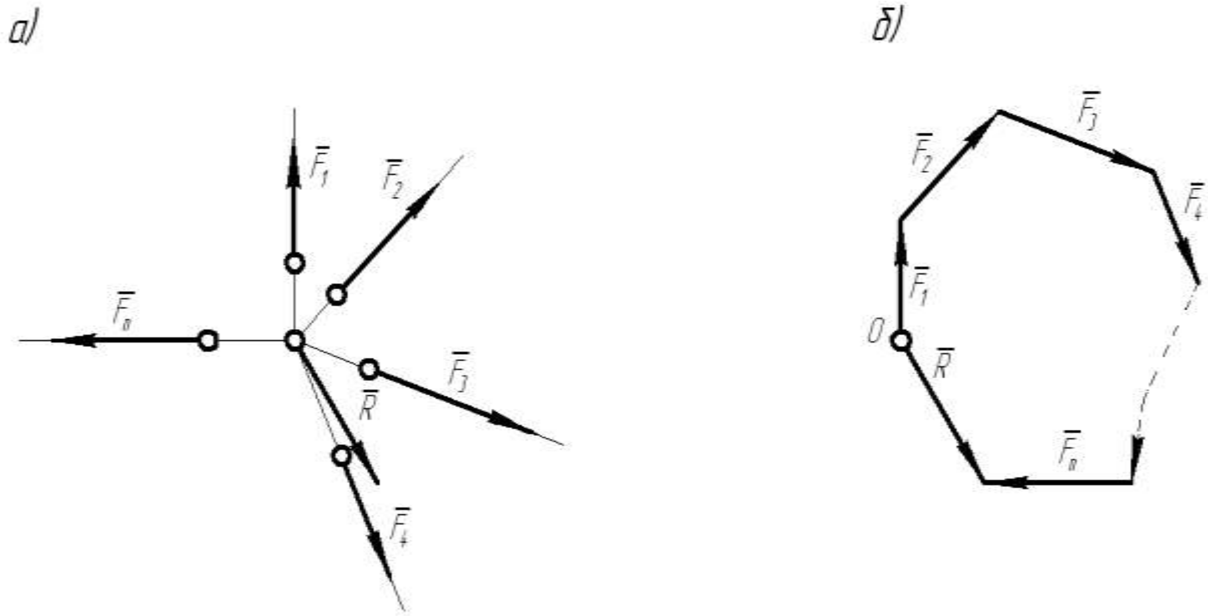


Рис.20

Для определения главного вектора $\overline{R}$ откладывается от произвольной точки О в определенном масштабе силу $\overline{F}_1$. Затем к концу вектора $\overline{F}_1$ прикладываем начало вектором $\overline{F}_2$. К концу вектора $\overline{F}_2$ начало вектора $\overline{F}_3$ и т.д. Соединяя   начало первого вектора с конца последнего $\overline{F}_n$, получим вектором $\overline{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 ... + \overline{F}_n$$

4.4. Разложение сил

Разложить данную силу на несколько составляющих - значит найти такую систему нескольких сил, для которой данная сила является равнодействующей. Эта задача является неопределенной и имеет однозначное решение лишь при заданных дополнительных условиях.

Частные случаи

а) разложение силы по заданным направлениям.

Задача сводится к построению параллелограмма, у которого разлагается сила является диагональю, а стороны параллельны заданным направлениям (см. рис18,а).

б) разложение силы по заданным направлениям

Задача является определенной, если направления не лежат в одной плоскости и сводится к построению такого параллелепипеда, у которого диагональ изображает заданную силу (см. рис.19).

4.5. Проекция силы на ось и на плоскость

При решении задач статики аналитическим методом приходится определять проекцию силы на ось.

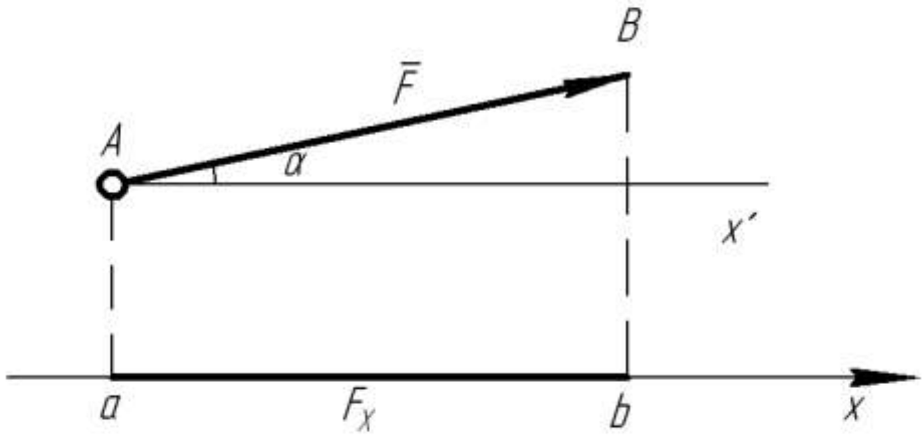


Рис.21

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси (рис.21)

$F_x = F \cdot cos\,\alpha$

если $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ - проекция F_x - положительна

если $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ - проекция F_x - отрицательна

если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ - проекция F_x - равна нулю.

Проекция силы на плоскость (рис.22) в отличии от проекции силы на ось есть величина векторная.

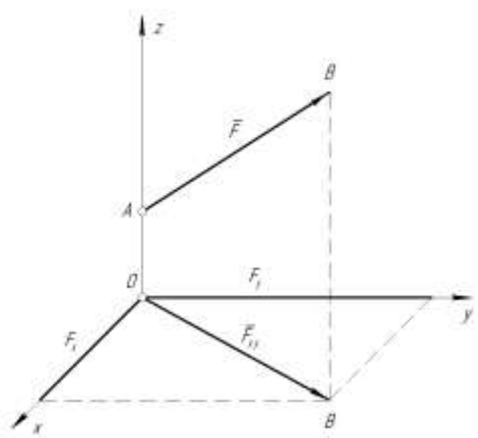


Рис.22

4.6. Аналитический способ сложения сил.

Проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось (рис.23).

$R_x = \sum F_{kx}$, $R_y = \sum F_{ky}$, $R_z = \sum F_{kz}$.

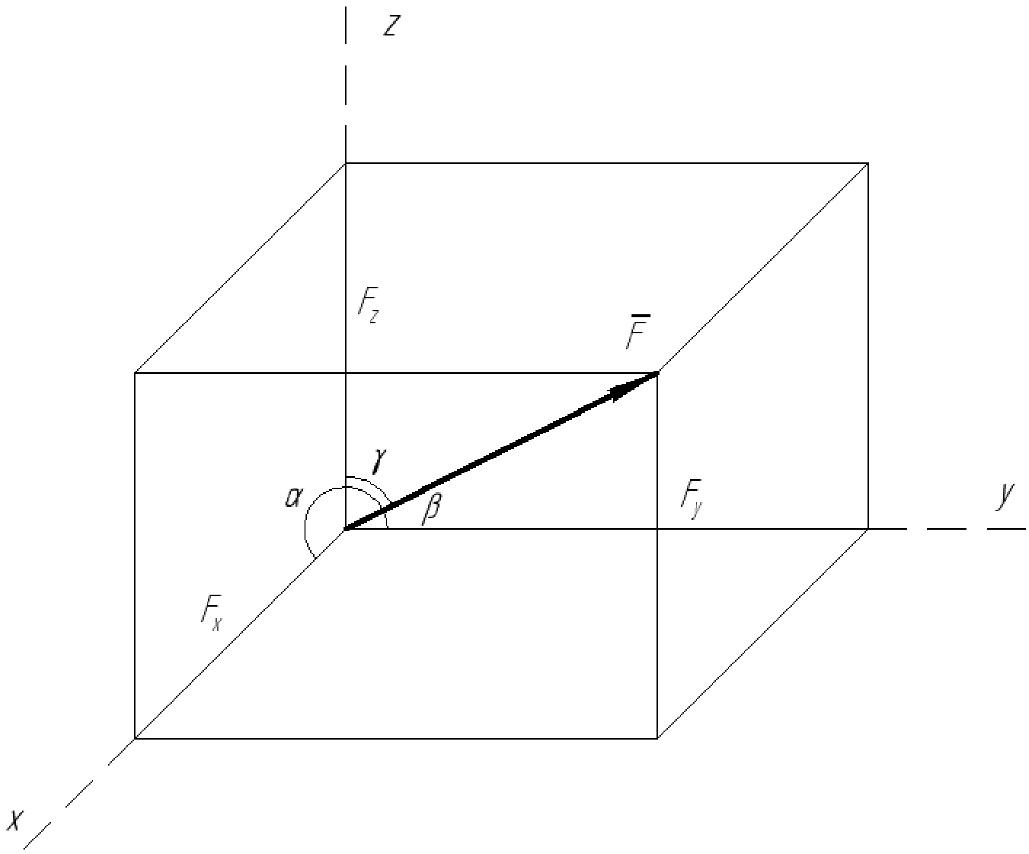


Рис.23

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ $\quad\quad$ $\cos\alpha = \dfrac{F_x}{F}$, $\cos\beta = \dfrac{F_y}{F}$, $\cos\gamma = \dfrac{F_z}{F}$.

Для сил, лежащих в одной плоскости, имеем

$R_x = \sum F_{kx}$, $R_y = \sum F_{ky}$; $\quad\quad$ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, $\cos\beta = \dfrac{R_y}{R}$.

Пример. Найти сумму трех лежащих в одной плоскости сил (рис.24), если $F = 50H$, $Q = 40H$, $P = 45H$, $\alpha = 45^0$, $\beta = 30^0$.

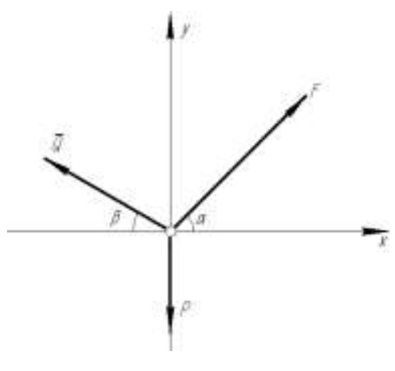


Рис.24

Решение. Вычисляем проекции сил на координатные оси:

$F_x = F \cdot \cos\alpha = 35{,}4H$, $Q_x = -Q \cdot \cos\beta = -34{,}6H$

$P_x = 0$; $F_y = F \cdot \sin\alpha = 35{,}4H$

$Q_y = Q \cdot \sin\beta = 20H$, $P_y = -P = -45H$

$R_x = 35{,}4 - 34{,}6 = 0{,}8H$

$R_y = 35{,}4 + 20 - 45 = 10{,}4H$

Следовательно,

$R = \sqrt{0{,}8^2 + 10{,}4^2} = 10{,}43H$

$R = 10{,}43H$

5. Сходящаяся система сил

Сходящейся системой сил называется такая система пространственных или плоских сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис.25)

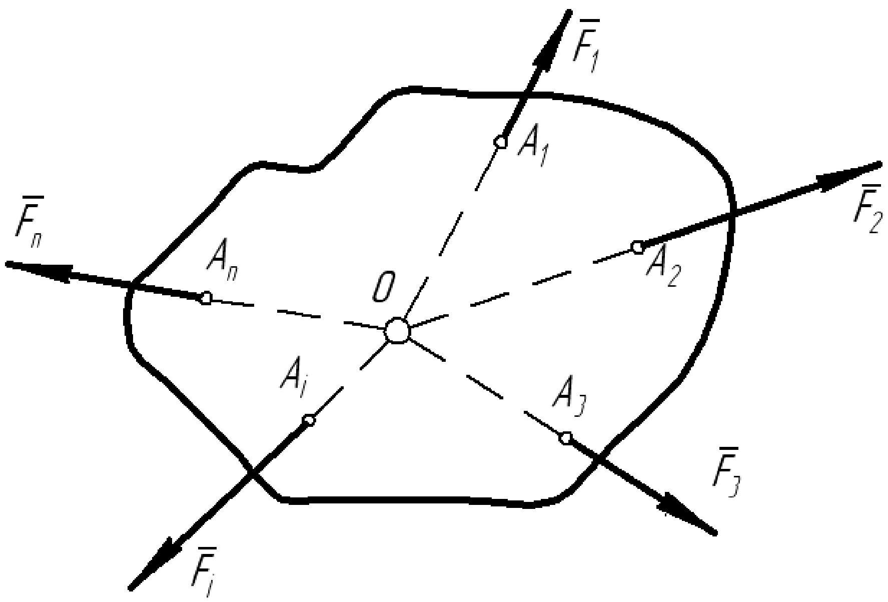


Рис.25

Для равновесия системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая, а следовательно, и главный вектор были равны нулю.

Существуют две формы условия равновесия системы сходящихся сил:

1) Геометрическое.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым (рис.26).

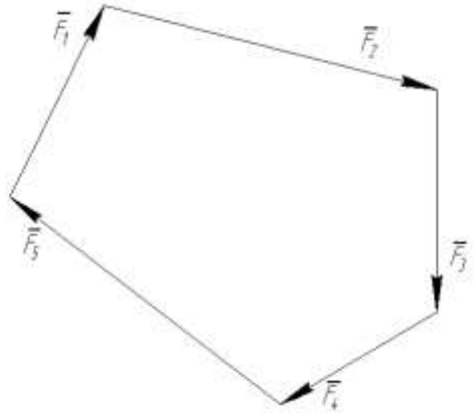


Рис.26

2) Аналитические условия равновесия

Главный вектор должен быть равен нулю: $\overline{R} = 0$

Модуль главного вектора равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0\,.$$

Это условие выполнимо тогда, когда

$R_x = 0;\ R_y = 0;\ R_z = 0$ или

$$\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ F_{kz} = 0\,.$$

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил, на каждую из координатных осей были равны нулю.

Для плоской системы сходящихся сил должно выполняться условие

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0;$$

3) теорема о трех силах:

если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил, пересекаются в одной точке.

Пример. Однородная балка АВ длины l и весом 400Н удерживается в равновесии тросом ВС и шарниром А (рис.27 а). Найти натяжение троса ВС и силу реакции шарнира А если $\angle ABC = 60^0$, $\angle CAB = 90^0$.

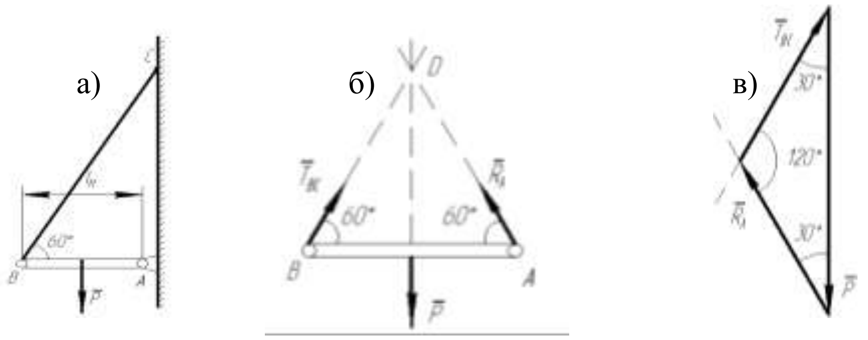


Рис.27

Решение. Освобождаемся от связей и вводим вместо них реакции $\overline{T}_{BC}$, $\overline{R}_A$ (рис.27,б). Сила $\overline{T}_{BC}$ направлена вдоль троса ВС. По теореме о трех силах линии действия трех сил $\overline{T}_{BC}$, $\overline{R}_A$, $\overline{P}$ пересекаются в одной точке Д. Очевидно, что треугольник АВД равносторонний.

Строим треугольник в определенном масштабе

Имеем $\overline{T}_{BC} = R_A$; по теореме синусов

$\dfrac{P}{\sin 120^0} = \dfrac{R_A}{\sin 30^0}$; отсюда $R_A = 231H$; $T_{BC} = 231H$

Согласно аналитического условия равновесия

$\sum F_{kx} = 0$; $T_{Bc} \cdot \cos 60^0 - R_A \cdot \cos 60^0 = 0$; $T_{BC} = R_A$;

$\sum F_{ky} = 0$; $T_{Bc} \cdot \cos 60^0 + R_A \cdot \cos 60^0 - P = 0$;

$2T_{BC} \cdot \cos 30^0 = P$; $T_{BC} = 231H$.

Теорема о трех силах позволила определить заранее неизвестное направление реакции шарнира А (рис.27,в).

6. Произвольная система сил.

Произвольной системой сил называется такая система, силы которой произвольно расположены в плоскости и пространстве.

6.1. Произвольная плоская система сил.

Произвольной плоской системой сил называется такая система, силы которой произвольно расположены в плоскости.

Любая плоская произвольная система сил приводится к одной силе $\overline{R}$, приложенной в произвольно выбранном центре О, и паре с моментом M_0, где сила и пара лежат в одной плоскости.

Главный вектор $\overline{R}$ не зависит от выбора центра приведения О. Главный момент M_0 зависит от выбора центра приведения.

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т.е. чтобы выполнить условия $\overline{R} = 0, \overline{M}_0 = 0$.

Основная теорема статики любую произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно в общем случае привести к силе, равной главному вектору системы сил, и паре сил, векторный момент которой равен главному моменту системы сил относительно точки, выбранной за центр приведения.

Для построения главного вектора $\overline{R}$ относительно какого-то центра приведения необходимо все силы перенести параллельно самим себе в этот центр. При параллельном переносе силы в любую точку тела, не лежащую на линии ее действия, последняя неэквивалентна исходной.

Основание для параллельного переноса силы, не лежащей на линии ее действия, дает лемма Пуансо.

Лемма Пуансо. При параллельном переносе силы, не лежащей на линии ее действия, необходимо добавить при этом пару сил, векторный момент которой равен векторному моменту переносимой силы относительно новой точки приложения сила.

Аналитически условия равновесия.

1.Основная формула условий равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum m_0\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

2.Вторая форма условий равновесия:

$$\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0, \ \sum m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0,$$

$$\sum F_{kx} = 0.$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на ось Ox, не перпендикулярную прямой AB, были равны нулю.

3. Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов)

$$\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0, \sum m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0, \sum m_C\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

6.2. Плоская система параллельных сил.

Плоской системой параллельных сил называется такая система, когда силы, действующие на твердое тело, расположены параллельно друг другу и лежат в одной плоскости (рис.28).

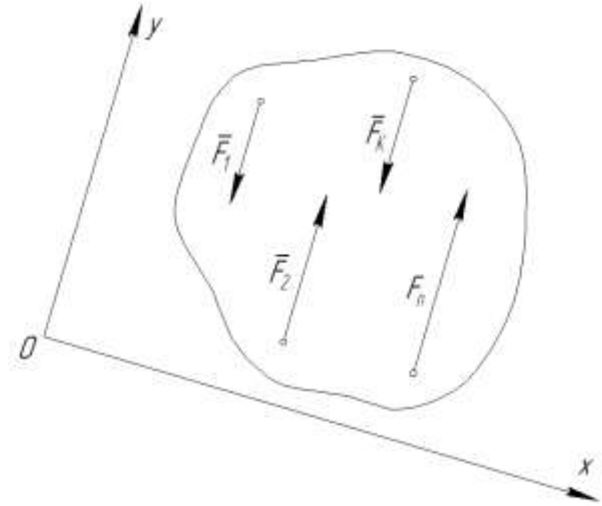


Рис.28

Направим ось Oy параллельно силам. Тогда ось Ox будет перпендикулярно направлению действия сил. Аналитическим условием равновесия будет:

$$\sum F_{ky} = 0,\ \sum m_0\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Другая форма условия равновесия для параллельных сил:

$$\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0,\ \sum m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

При этом точки А и В не должны лежать на прямой, параллельной силами.

6.3. Частные случаи приведения плоской системы сил.

Плоскую систему сил можно привести к более простой системе сил, состоящей из силы или пары сил. Эти случаи возможны (рис.29), если система сил не находится в равновесии, т.е., если одновременно не равняются нулю главный вектор и момент системы сил. Результат зависит от значений $\overline{R}$ и M_0.

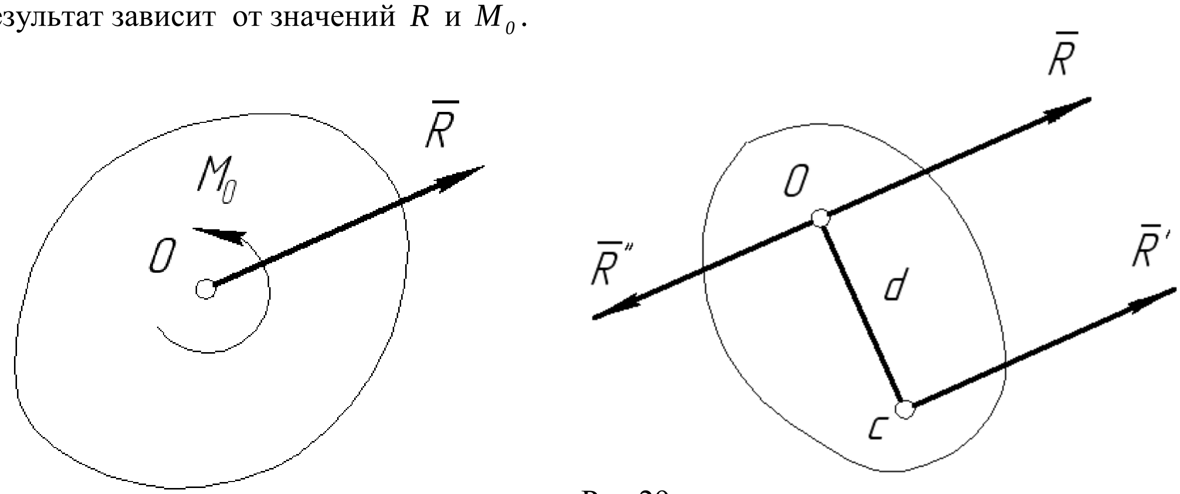


Рис 29

1. Если $\overline{R}=0$, а $M_0 \neq 0$, то система сил приводится к одной паре с моментом M_0.

2. Если $\overline{R} \neq 0$, то система приводится к одной силе, т.е. к равнодействующей.

Возможны два случая:

а) $\overline{R} \neq 0$, $M_0 = 0$. В этом случае система приводится к равнодействующей $\overline{R}$, проходящей через центр О.

б) $\overline{R} \neq 0$, $M_0 \neq 0$. В этом случае вся система заменяется равнодействующей $\overline{R}'=\overline{R}$,

где $\overline{R}'=\overline{R}$, $\overline{R}''=-\overline{R}$, $|M_0| = R \cdot d$, $\overline{OC} \perp \overline{R}$. Знак момента $m_0(\overline{R}')$ должен совпадать со знаком M_0.

6.4. Теорема Вариньона

При вычислении моментов сил часто бывает удобно пользоваться теоремой Вариньона:

Момент равнодействующей силы относительно любого центра приведения равен геометрической сумме моментов сил системы относительно того же центра

$$\overline{m}_0\left(\overline{R}^*\right)=\sum_{k=1}^{n}\overline{m}_0\left(\overline{F}_k\right).$$

где $\overline{R}^* \sim (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n)$.

6.5. Статические определимые и статически неопределимые системы тел.

Условия равновесия, в которые входят силы реакции связей обычно называют уравнениями равновесия.

Число реакций связей зависит от числа наложенных связей.

Чтобы задача статики была разрешимой, надо чтобы число уравнений равновесия равнялось числу неизвестных реакций входящих в эти уравнения.

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, называются статически определенными, а системы тел (конструкции) – статически неопределенными. Задачи, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений, называются статически неопределенными, а системы тел (конструкции) – статически неопределенными.

Рассмотрим арку, изображенную на рис.30.

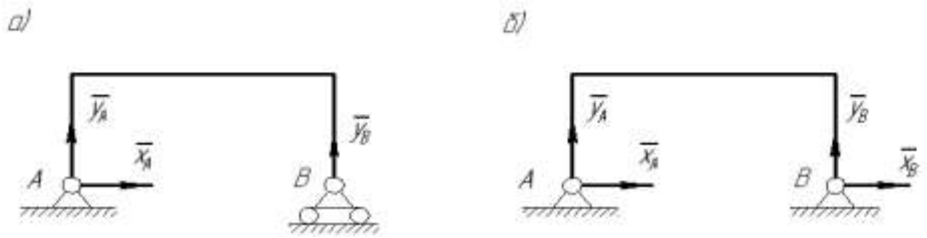


Рис.30

На рис.30, а связями являются неподвижная шарнирная опора в точке А и катковая опора в точке В. Такая арка будет статически определимой, поскольку здесь три неизвестных реакции $X_A, У_A, У_B$.

На рис.30,б изображена арка на двух неподвижных арках. Неизвестных реакций – четыре ($X_A, У_A, X_B, У_B$). Уравнений равновесия три и арка станет статически неопределимой.

Задача 1. Брус(рис.31, а) крепится на двух опорах для этого способа крепления, если нагрузки, действующие на брус составляют: $F = 4kH$; $M = 5kH \cdot M$; $P = 3kH$; $\alpha = 30^0$.

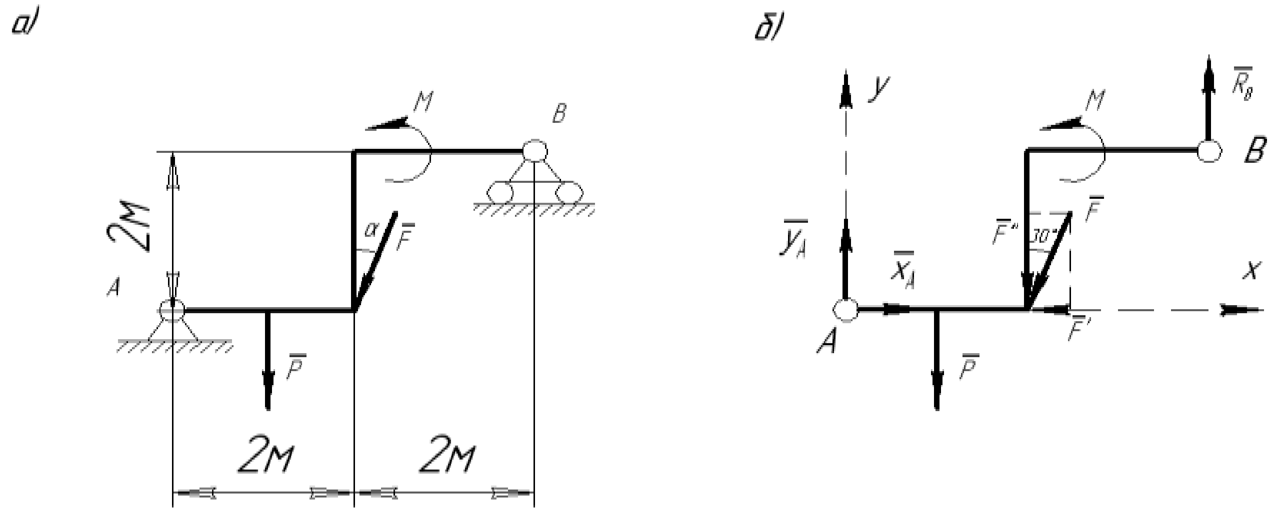


Рис.31

Решение. Рассмотрим систему уравновешивающих сил, приложенных к конструкции. Действия связей на конструкцию заменяем их реакциями (рис.31,б):

$\overline{X}_A, \overline{У}_A, \overline{R}_B$; Силу $\overline{F}$ разложим на две составляющие $F' = F \cdot cos 60^0 = 2kH$;

$F'' = F \cdot cos 30^0 = 3{,}464kH$.

Выбираем систему координат $\boldsymbol{Axy}$ и составляем уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил, действующей на брус

$\sum F_{kx} = 0$; $X_A - F' = 0$;

$\sum F_{ky} = 0$; $У_A - P - F'' + R_B = 0$

$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0$, $R_B \cdot 4 - P \cdot 1 - F'' \cdot 2 + M = 0$;

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными $X_A, У_A, R_B$, находим:

$X_A = 2kH$, $У_A = 5{,}23kH$; $R_B = 1{,}23kH$.

Задача 2. Однородный брус АВ длиной 1,8 м и весом Р=600Н прикреплен к шарниру А и опирается на высоту Д, составляя с горизонтальной осью X угол $\alpha = 30^0$. Расстояние АД=1,1 м. Определить реакции опор А и Д, если на брус действует пара сил с моментом $M = 200H \cdot м$ (рис.32).

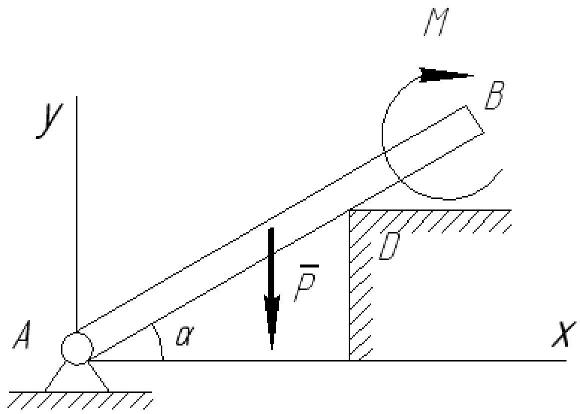


Рис.32

Решение. Рассмотрим равновесие (рис.33) бруса. На него действуют внешняя сила $\overline{P}$ и пара сил с моментом М, а также реакции связей $\overline{X}_A, \overline{У}_A, \overline{N}_Д$.

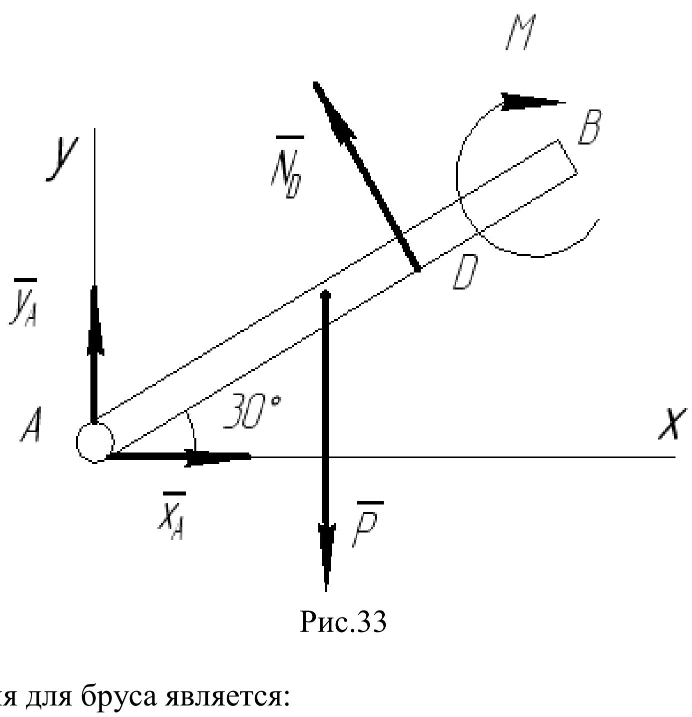


Рис.33

Условием равновесия для бруса является:

$$\sum F_{kx} = 0; \;\; X_A - N_Д \cdot sin30^0 = 0;$$

$$\sum F_{kx} = 0; \;\; У_A - P + N_Д \cdot cos30^0 = 0;$$

$$\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0, \;\; N_Д \cdot 1{,}1 - M - P \cdot \frac{AB}{2} \cdot cos\, 30^0 = 0.$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными, получим значения реакций: $N_Д = 650H$, $X_A = 324{,}7H$, $У_A = 37H$.

7. Произвольная пространственная система сил

Произвольной пространственной системой сил называется такая система, силы которой произвольно расположены в пространстве.

В общем случае произвольная пространственная система сил приводится к главному вектору $\overline{R}$ и главному моменту $\overline{M}$. Угол между векторами $\overline{R}$ и $\overline{M}$ в этом случаи произволен.

Очевидно, что главный вектор не зависит от выбора центра приведения. Главный момент зависит от выбора центра приведения.

Тело находится в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил, если главный вектор $\overline{R}$ и главный момент $\overline{M}$ были равны нулю:

$\overline{R} = 0$; $\overline{M} = 0$.

Это условие равновесия в векторной форме.

Проецируя эти векторные условия равновесия на оси координат, получим аналитические условия равновесия:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\ M_x = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\overline{F}_k\right) = 0;$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\overline{F}_k\right) = 0;$$

$$R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,\ M_z = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Задача 1. На горизонтальную прямоугольную плиту весом P = 2кН, которая закреплена сферическим шарниром в точке А, цилиндрическим шарниром в точке В и невесомым стрежнем ДД’ действует сила F = 6 кН параллельная плоскости XAZ, а в плоскости, параллельной YAZ действует пара сил с моментом $M = 3кН \cdot м$ (рис.34). Определить реакции опор А и В и стержни ДД’.

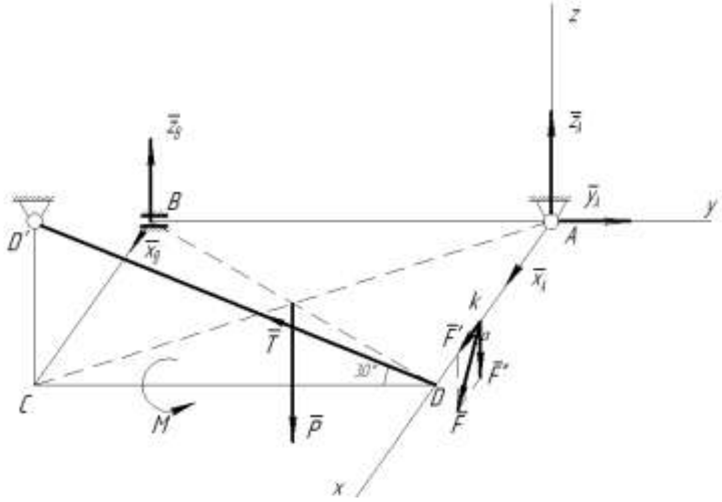


Рис.34

Решение

1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\overline{P}, \overline{F}$ и пара с моментом М, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три оставляющие $\overline{X}_A, \overline{У}_A, \overline{Z}_A$ цилиндрического – на две составляющие $\overline{X}_B, \overline{Z}_B$; реакцию $\overline{T}$ стержня направляем вдоль стержня от Д к Д$^/$, предполагая, что он растянут.

2.Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия:

$\sum F_{kx} = 0;\ X_A + X_B + F \cdot sin\alpha = 0;$ (1)

$\sum F_{ky} = 0;\ У_A = T \cdot cos30^0 = 0;$ (2)

$\sum F_{kz} = 0;\ Z_A + Z_B - P - F \cdot cos\alpha + T \cdot sin30^0 = 0;$ (3)

$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0,\ M + P \cdot \frac{AB}{2} - Z_B \cdot AB = 0;$ (4)

$\sum m_y(\overline{F}_k) = 0,\ P \cdot \frac{CB}{2} + F'' \cdot kA - T \cdot АД \cdot \sin30^0 = 0;$ (5)

$\sum m_z(\overline{F}_k) = 0;\quad X_B \cdot AB - T \cdot АД \cdot cos30^0 = 0.$

Для определения моментов силы $\overline{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные осям X и Z:

$F' = F \cdot sin\alpha$, $F'' = F \cdot cos\alpha$, и

применяем теорему Вариньона. Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\overline{T}$.

Подставляя в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, находим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -12{,}9kH$, $Z_A = -4{,}1kH$

$X_B = 8{,}7kH$, $Z_B = 4kH$

$У_A = 10{,}8кH$, $T = 12{,}5\,kH$

Знак минус показывает, что реакции $\overline{X}_A$ и $\overline{Z}_A$ направлены противоположно показанным на рис.34.

8. Распределенные силы

Механической мерой действия распределенной нагрузки служит интенсивность q, равная величине силы, приходящейся на единицу длины. Измеряется интенсивность в ньютонах, деленных на метры (Н/м).

8.1. Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой (рис.35).

$q = const$; Для такой системы сил $Q = l \cdot q$ интенсивность q имеет постоянное значение. При статических расчетах эту систему сил можно заменить равнодействующей $\overline{Q}$.

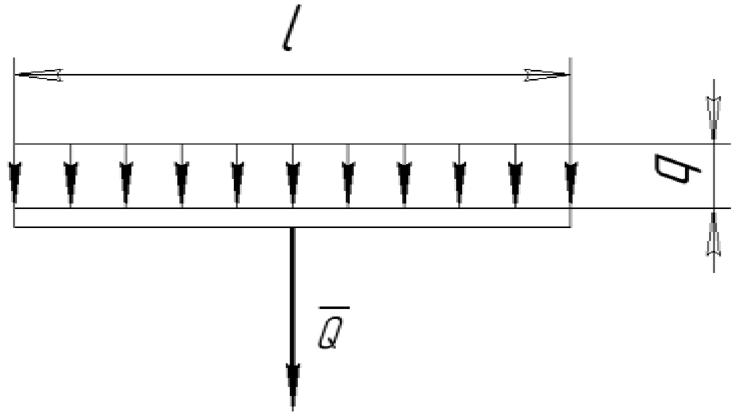


Рис.35

8.2. Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (рис.36).

Примером является силы давления воды на плотину. Для этих сил интенсивность q является величиной переменной, изменяющейся от нуля до максимального значения q_{max}.

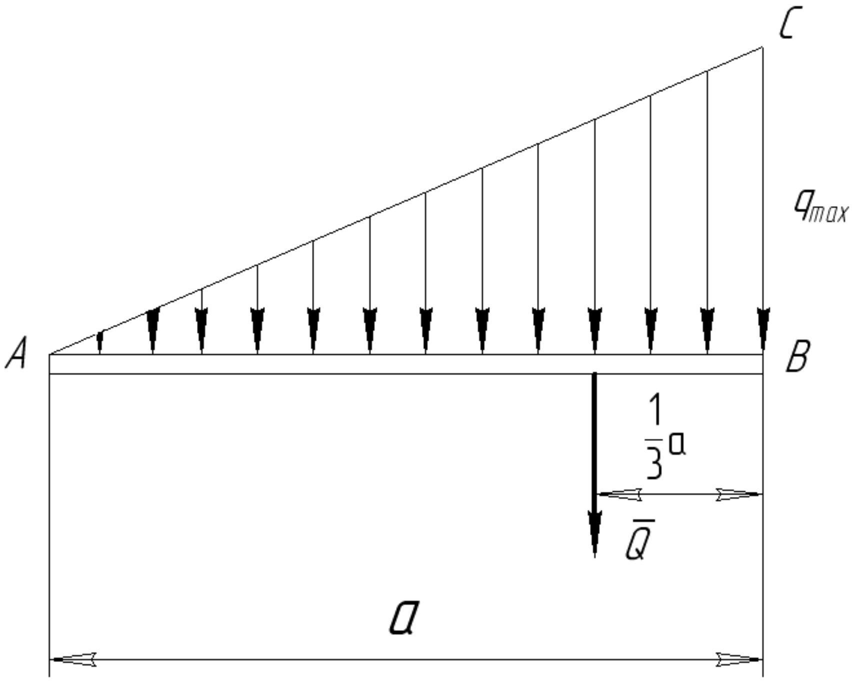


Рис.36

Равнодействующая $\overline{Q}$ таких сил определяется аналогично определению силы тяжести треугольной однородной пластины ABC. Вес такой пластины пропорционален ее площади

$Q = 0{,}5 \cdot a \cdot q_{max}$.

Приложена сила $\overline{Q}$ на расстоянии $\dfrac{a}{3}$ от стороны ВС (рис.36).

8.3. Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по произвольному закону (рис.37).

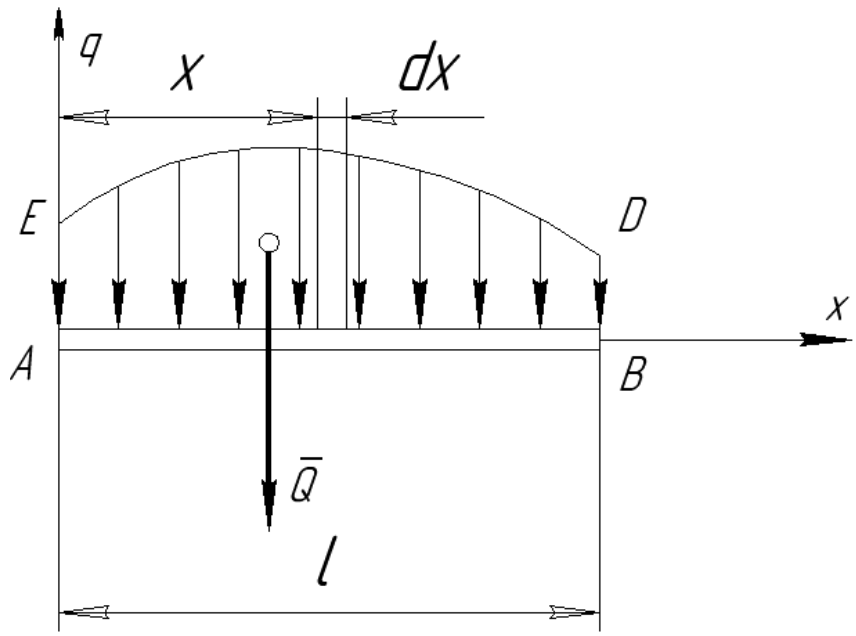


Рис.37

Равнодействующая $\overline{Q}$ таких сил, по аналогии с силой тяжести, по модулю равна площади фигуры АВДЕ и проходит через центр тяжести этой площади.

$$Q = \int_0^l q(x)dx.$$

8.4. Силы, равномерно распределенные по дуге окружности (рис.38).

Примером являются силы гидростатического давления на боковые стенки цилиндрического сосуда.

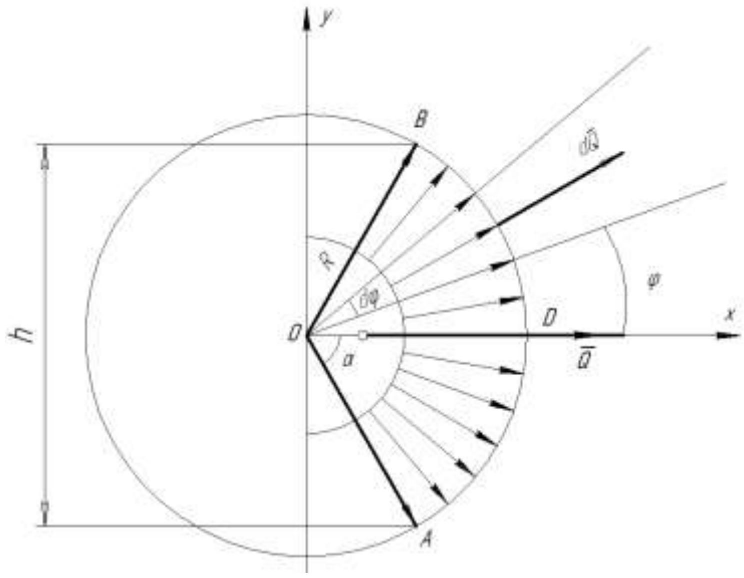


Рис.38

Если R - радиус дуги,

$\angle BOD = \angle AOD = \alpha$,

OD - ось симметрии, тогда сила $\overline{Q}$ является равнодействующей системы сходящихся сил. Численно $Q = Q_x$. Выделим элемент $d\varphi$ положение которого определяется углом φ.

Очевидно, что $dQ = q \cdot dS = q \cdot R \cdot d\varphi$, а проекция этой силы на ось Ox будет

$$dQ_x = dQ \cdot cos\,\varphi = q \cdot R \cdot (cos\,\varphi) \cdot d\varphi$$

$$Q_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ_x = qR\int_{-\alpha}^{\alpha} cos\,\varphi \cdot d\varphi = 2qR \cdot sin\,\alpha$$, где $R \cdot sin\,\alpha = \dfrac{AB}{2}$.

Так как $Q_x = Q$, то $Q = q \cdot h$, где

q- интенсивность нагрузки.

Задача. На брус, закрепленный с помощью жесткой заделки, действуют внешние нагрузки (рис.39,а).

$P = 10kH$, пара с моментом $M = 6kH \cdot м$ и равномерно распределенная нагрузка $q = 3\,кН/м$.

Определить реакции опоры А при данном способе крепления.

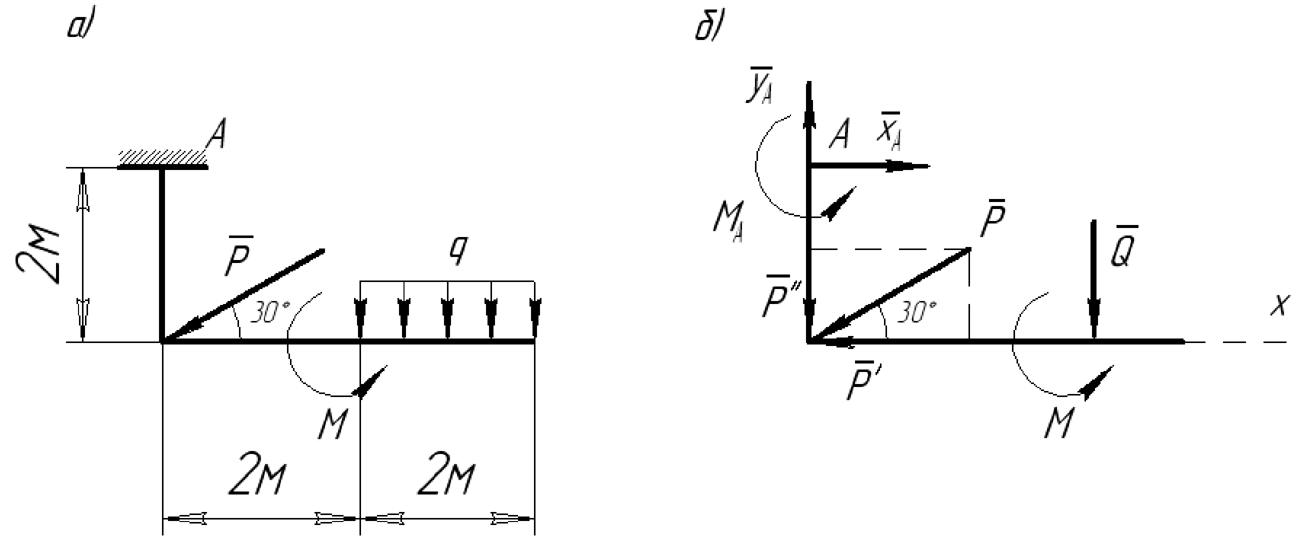


Рис.39

Решение. На брус действует система уравновешивающих сил. Действие связи А на брус заменяем их реакциями (рис.39, б): $\overline{X}_A, \overline{У}_A, M_A$. Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей

$$Q = q \cdot 2 = 6kH$$

Так как на брус действует произвольная плоская система сил, составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0;\ X_A - P';$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ У_A - Q - P'' = 0;$$

$$\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0,\ M + M_A - Q \cdot 3 - P' \cdot 2 = 0.$$

где $P' = P \cdot cos30^0$, $P'' = P \cdot sin30^0$.

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными, получим

$$X_A = 8{,}66kH,\ У_A = 11кH,\ M_A = 29{,}32кH\,м$$

9. Расчет плоских ферм

Фермой называется жесткая конструкция, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами (рис.40).

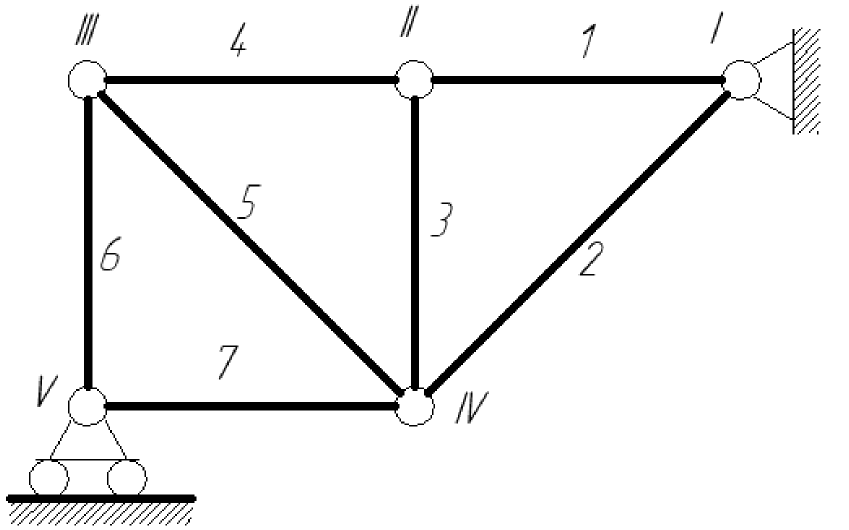


Рис.40

$k = 7$ - число стержней;

$n = 5$ - число узлов.

Число стержней k и число узлов в плоской ферме связаны соотношением $k = 2n - 3$.

Расчет ферм сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

9.1. Метод вырезания узлов

Этот метод заключается в последовательном рассмотрении условия равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов.

Этим методом удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Поясним этот метод расчета на конкретном примере.

Пример 1. Ферма образована из одинаковых прямоугольных равнобедренных треугольников (рис.41).

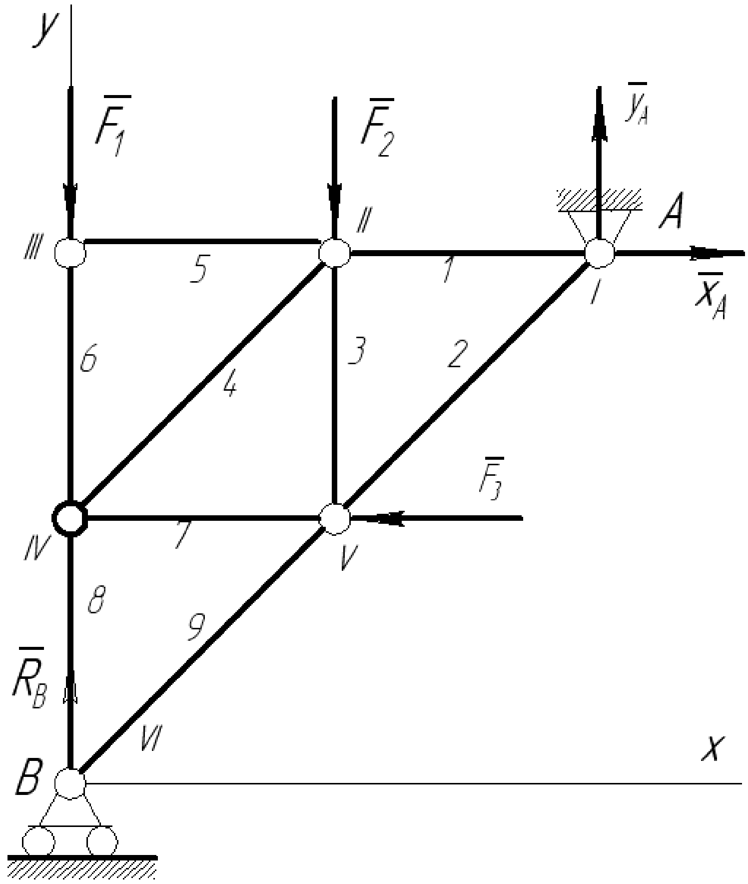


Рис.41

На ферму действуют две силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, параллельны оси У и сила $\overline{F}_3$ параллельная оси Х, численно равные:

$F_1 = F_2 = 10kH$, $F_3 = 15kH$.

Определить опорные реакции и усилия в стержнях.

Решение. В этой ферме число стержней $k = 9$, число узлов $n = 6$.

Условие $k = 2n - 3$выполняются и ферма является жестокой без лишних стержней. Обозначим реакции опор. Обозначим длину катета треугольника через l.

$\sum F_{kx} = 0;\ X_A - F_3 = 0;$

$\sum F_{ky} = 0;\ R_B + У_A - F_1 - F_2 = 0;$

$\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0,\ F_2 \cdot l + F_1 \cdot 2l - F_3 \cdot l - R_3 \cdot 2l = 0.$

Подставив известные значения сил, получим:

$X_A = 15kH$, $У_A = 12{,}5кH$, $R_B = 7{,}5kH$.

Далее определяем усилия в стержнях. Рассмотрим равновесие узла I, предположив, что стрежни 1 и 2 растянуты (рис.42). Расчет фермы надо начинать с того узла, где сходятся не более двух стержней, усилия в которых неизвестны.

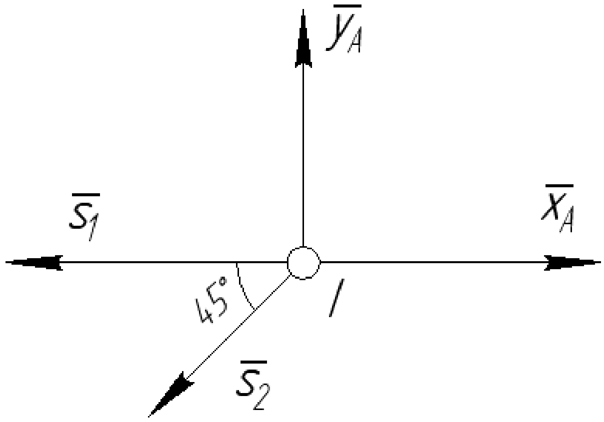


Рис.42

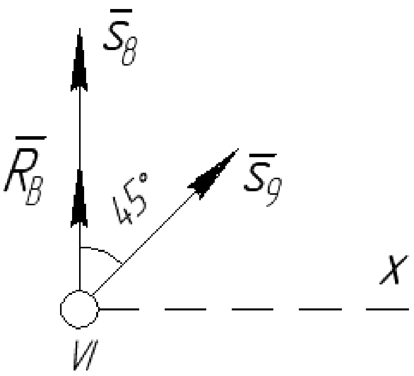
Составляем уравнения равновесия для плоской сходящейся системы сил. Предполагаем, что стержни растянуты, т.е. силы направлены

$$\sum F_{kx} = 0;\ X_A - S_1 - S_2 \cdot \cos 45^0 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ У_A - S_2 \cdot \cos 45^0 = 0;$$

и определяем усилия S_1 и S_2: $S_1 = 2{,}5kH$, $S_2 = 17{,}7kH$.

Далее надо рассматривать равновесие узла VI (рис.43).



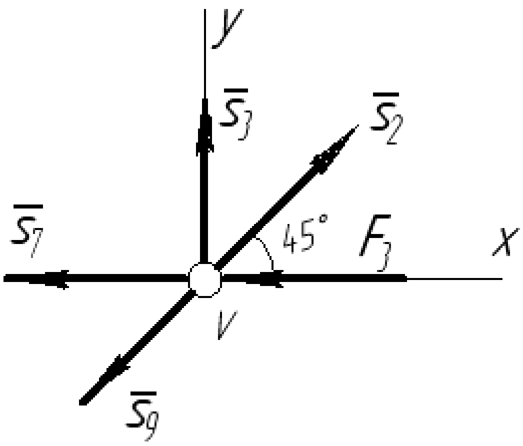
$$\sum F_{kx} = 0;\ S_9 \cdot \cos 45^0 = 0.$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ R_B + S_8 + S_9 \cdot \cos 45^0 = 0$$

Откуда $S_9 = 0; S_8 = -7{,}5kH$

Рис.43

Рассмотрим равновесие узла V (рис.44)



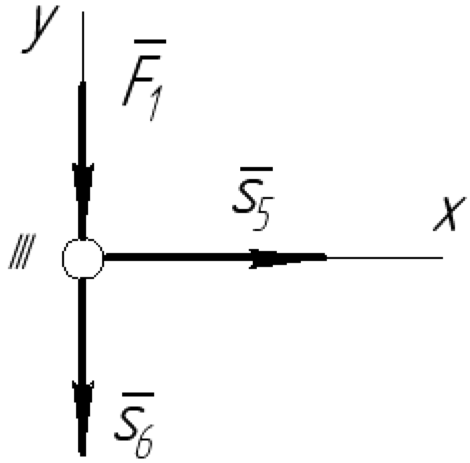
$$\sum F_{kx} = 0,\ S_2 \cdot \cos 45^0 - F_3 - S_7 - S_9 \cdot \cos 45^0 = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ S_3 + S_2 \cdot \cos 45^0 - S_9 \cdot \cos 45^0 = 0.$$

Откуда $S_7 = 1{,}77kH$.

Рис.44

Рассмотрим узел III (рис.45).



$\sum F_{kx} = 0$; $S_5 = 0$;

$\sum F_{ky} = 0$; $-F_1 - S_6 = 0$;

$S_6 = -F_1 = -10kH$.

Рис.45

Остается рассмотреть равновесие четвертого узла (рис.46), чтобы определить усилие в четвертом стержне.

Достаточно составить одно уравнение равновесия. Но для проверки можно решить и второе уравнение.

$\sum F_{kx} = 0$, $S_7 + S_4 \cdot cos 45^0 = 0$ (1)

$\sum F_{ky} = 0$; $S_6 + S_4 \cdot cos 45^0 - S_8 = 0$; (2)

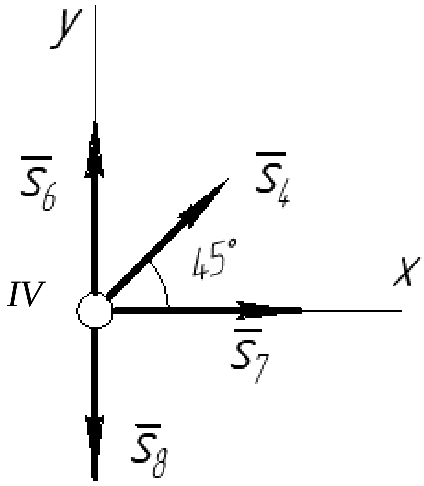


Рис.46

Из уравнения (1) следует, что $S_4 = 3{,}54kH$.

Из уравнения (2) получим тот же самый ответ $S_4 = 3{,}54kH$. Окончательно имеем:

Ответ: $X_A = 15kH;$

$У_A = 12{,}5кH;$

$R_B = 7{,}5kH$;

$S_1 = 2{,}5kH$, $S_2 = 17{,}7kH$, $S_3 = 1{,}77kH$, $S_4 = 3{,}54kH$, $S_5 = 0$; $S_6 = -10kH$;

$S_7 = -2{,}5kH$, $S_8 = -7{,}5kH$, $S_9 = 0$.

Знаки минус показывают, что стержни 6,7,8 сжаты.

9.2. Метод сечений (метод Риттера)

Суть метода заключается в том, то усилия в стержнях можно определить сразу в трех наперед заданных стержнях. Для этого в этом месте ферму рассекают на две части, и рассматривают равновесие одной из частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т.е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов).

Пример.2. Найти усилие в пятом стержне фермы, если силы, действующие на узлы равны $F_1 = 5kH$, $F_2 = 8kH$ и параллельны соответственно осям X и У. Ферма составлена из равнобедренных прямоугольных треугольников (рис.47).

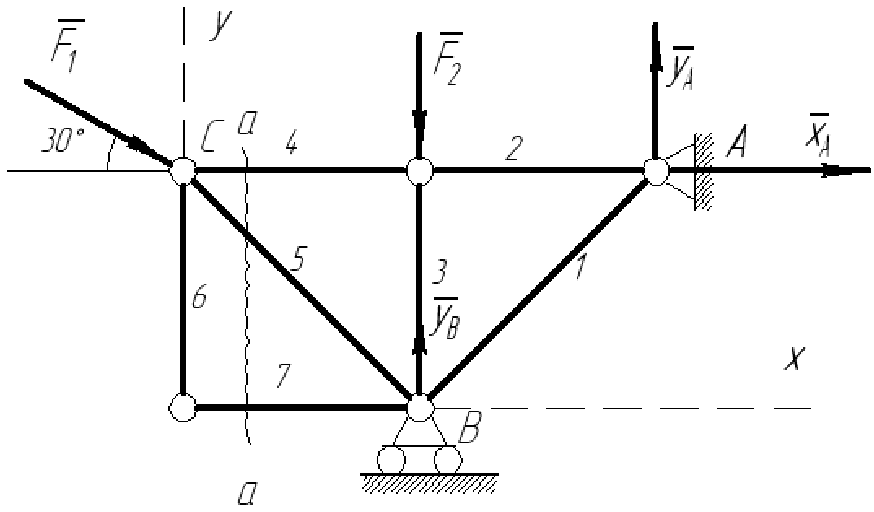


Рис.47

Решение. Вначале, как и при расчете способом вырезания узлов, рассматривая равновесие фермы как твердого целого тела и определяем реакции опор.

$$\sum F_{kx} = 0;\ F_1 \cdot \cos 30^0 + X_A = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ У_A + У_B - F_2 - F_1 \cdot \cos 60^0 = 0;$$

$$\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0,\ F_2 \cdot l - У_B \cdot l + F_1 \cdot \cos 60^0 \cdot 2l = 0;$$

где l длина катета треугольника.

Подставив данные известных сил, находим: $X_A = -4{,}3kH$, $У_B = 13кH$, $У_A = -2{,}5кH$.

Теперь проводим сечение aa через стержни 4,5,7 и рассмотрим равновесие правой части (рис.48).

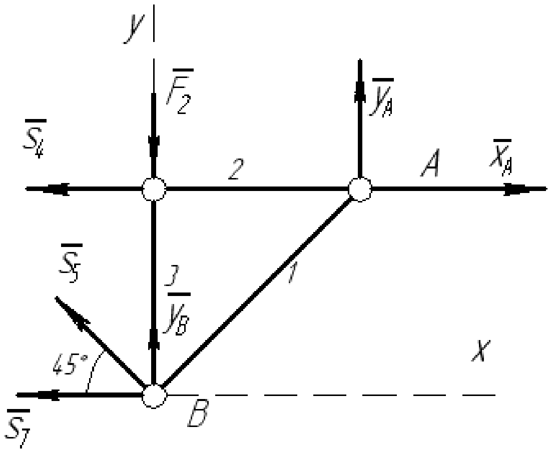


Рис.48

Действие отброшенной части заменяем силами $\overline{S}_4$, $\overline{S}_5$, $\overline{S}_7$ и составляем три уравнения равновесия:

$\sum F_{kx} = 0$; $X_A - S_4 - S_7 - S_5 \cdot cos\,45^0 = 0$; (1)

$\sum F_{ky} = 0$; $У_B - F_2 - S_5 \cdot cos\,45^0 = 0$; (2)

$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0$; $S_4 \cdot l - X_A \cdot l + У_A \cdot l = 0$; (3)

Из уравнения (2) определяем силу $S_5 = -7kH$. Усилия в стержнях 4 и 7 находим из уравнений 1 и 3.

$S_4 = -1{,}8kH$, $S_7 = 2{,}5kH$

Знаки минус показывают, что стержни 4 и 5 растянуты.

9.3. Графический способ

Вырезаем из фермы (рис.49) узел I.

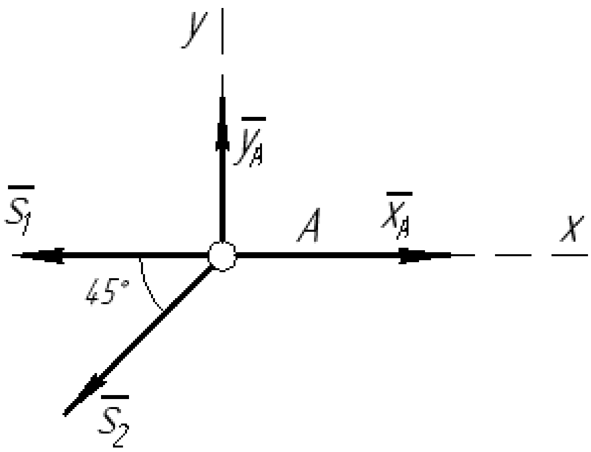


Рис.49

На него действуют четыре силы: $\overline{X}_A, \overline{У}_A, \overline{S}_1, \overline{S}_2$, сходящиеся в точке А. (в узле I). Так как узел I находится в равновесии, т.е. равнодействующая равна нулю, то силовой многоугольник должен быть замкнутым.

Выбрав масштаб, строим замкнутый четырехугольник, у которого две стороны известны по модулю ($\overline{X}_A, \overline{У}_A$) и направлению, а другие две только по направлению ($\overline{S}_1, \overline{S}_2$).

Построение начинаем с известных сил. Сначала откладываем в выбранном масштабе силу $\overline{X}_A$ (рис.50). К концу вектора $\overline{X}_A$ прикладываем начало вектора $\overline{У}_A$. Затем учитывая направления сил $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, достраиваем до замкнутого четырехугольника: сила $\overline{S}_1$ параллельна оси X, сила $\overline{S}_2$ направлена под углом 45^0 к осям X и У.

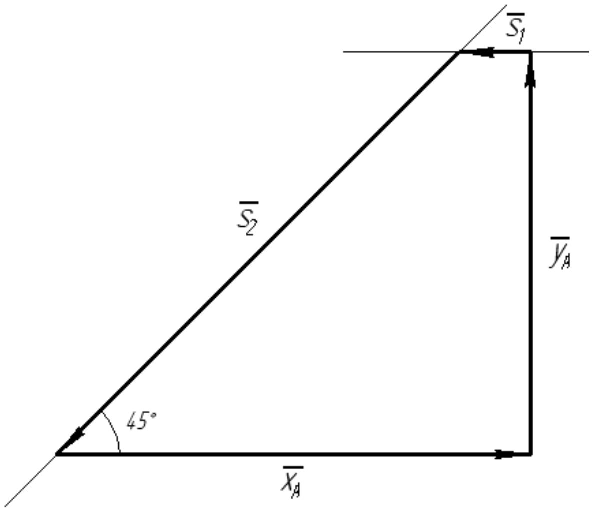


Рис.50

После этого измеряем длину векторов $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ и умножаем на масштаб. Этот способ является приближенным и служит в качестве проверки решения задачи другими способами.

10. Трение

10.1. Трение скольжения

Сопротивление, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого, называется трением скольжения.

В плоскости соприкосновения тел возникает сила трения.

Эта сила трения (сила сцепления) может принимать любые значения от нуля до значения F_{max}, называемого предельной силой трения.

Как показали опыты, максимальная сила трения $\vec{F}_{max}$ зависит от свойств материалов, из которых сделаны тела, их состояния, а также от величины нормального давления.

В инженерных расчетах обычно пользуются закономерностями, которые были получены опытным путем с достаточной степенью точности для описания явления трения скольжения. Эти законы можно сформулировать следующим образом.

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения, которая направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

2. Максимальная сила трения численно равна

$$F_{max} = f_0 \cdot N$$

где f_0 - коэффициент трения статический (величина безразмерная); зависит от материала соприкасающихся тел;

N - сила нормального давления.

3. Значение максимальной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся поверхностей.

Итак, при равновесии должно выполняться $F \le F_{max}$, т.е. значение силы трения при покое может быть любым, но не больше F_{max}.

Равенство $F = F_{max}$ наблюдается при скольжении одного тела по поверхности другого и называется предельным равновесием.

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна

$$F_{тр} = f \cdot N$$

где

f - динамический коэффициент трения;

N - сила нормального давления.

Динамический коэффициент трения скольжения f - величина безразмерная и определяется опытным путем. Его значение зависит от материалов, состояния поверхностей и от скорости движения тел.

Экспериментально предельны некоторые значения коэффициента трения скольжения:

Сталь по стали 0,15…0,25

Металл по дереву 0,4…0,6

Дерево по дереву 0,5…0,65

Сталь по почве:

песчаные и супесчаные сыпучие 0,25…0,35

песчаные и супесчаные связные 0,50…0,70

легко – и среднесуглинистые 0,35…0,50

тяжелые суглинистые и глинистые 0,40…0,90

10.2. Угол и конус трения

Рассмотрим тело, находящееся на шероховатой поверхности под действием приложенной силы $\overline{Q}$ (рис.51).

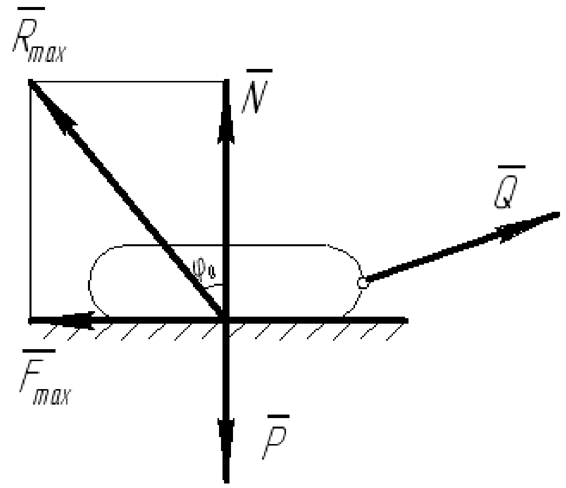


Рис.51

Реакция шероховатой поверхности слагается из двух составляющих: нормальной реакции $\overline{N}$ и силы трения $F_{тр}$. Тогда полная реакция $\overline{R}$ будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до F_{max} сила $\overline{R}$ меняется от $\overline{N}$ до $\overline{R}_{max}$, а ее угол с нормалью растет от нуля до некоторого предельного значения φ_0 (рис.51).

Наибольший угол φ_0 называется углом трения. Из чертежа видно, что

$$tg\varphi_0 = \frac{F_{max}}{N}$$

Так как $F_{max} = f_0 \cdot N$, то $tg\varphi_0 = f_0$.

Рассмотрим тело, расположенное на шероховатой поверхности, к которому приложена сила $\overline{P}$, направленная под углом α к нормали (рис.52).

Если сила $\overline{P}$ составляет с вертикалью угол $\alpha < \varphi_0$, то тело находится в покое и никакое увеличение этой силы не может вывести его из этого состояния. Если угол $\alpha > \varphi_0$, то тело находится в движении. Сила $\overline{P}$ может быть направлена к телу с разных сторон. Определяя угол трения φ_0 с разных сторон, можно построить конус трения.

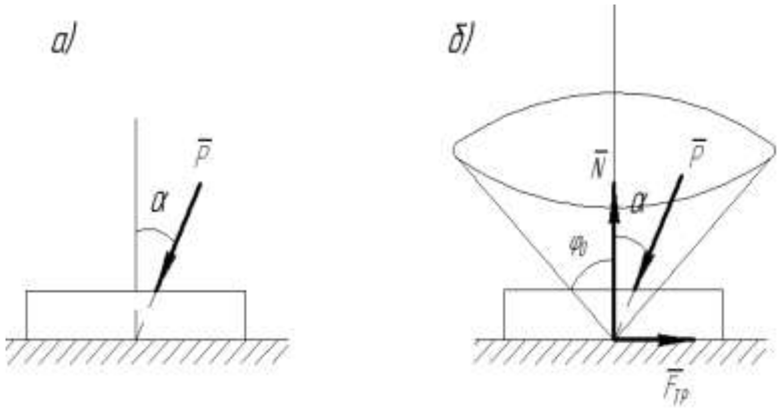


Рис.52

Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол α, меньший угла трения φ_0, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняется известные явления заклинивания или самоторможения тел, которые широко используются в технике. На нем основаны, например, крепежные соединения болт-гайка, способ удержания тяжести домкратами и т.п.

Задача 1. Груз весом $P = 200H$ находится на горизонтальной плоскости (рис.53). Найти силу $\overline{T}$, направленную под углом $\alpha = 45^0$ к этой плоскости, необходимую для сдвига тела с места, если статический коэффициент трения груза о плоскость равен $f_0 = 0{,}05$.

Решение. Рассмотрим предельное равновесие груза.

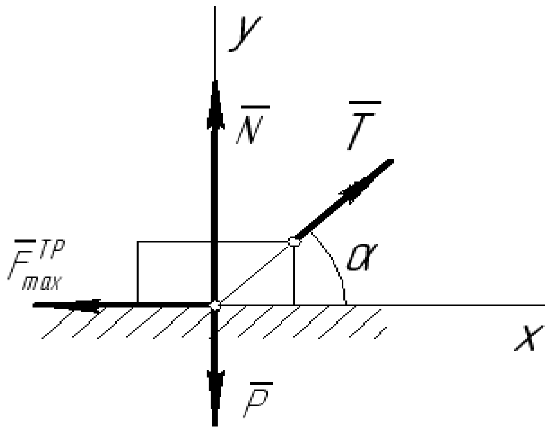


Рис.53

На груз действуют силы $\overline{P}, \overline{N}, \overline{T}$ и $F^{тр}_{max}$. Составим два уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0;\ T \cdot \cos\alpha - F^{тр}_{max} = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ N - P + T \cdot \sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) выразим N:

$N = P - T \cdot \sin\alpha$. Тогда $F^{тр}_{max} = f_0 \cdot N = f_0(P - T \cdot \sin\alpha)$. Подставим это выражение (1) и найдем T.

$$T = \frac{f_0 \cdot P}{\cos\alpha + f_0 \cdot \sin\alpha} = 100H.$$

10.3. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим каток радиуса R и веса P, лежащий на горизонтальной шероховатой поверхности. В связи с тем, что при соприкосновении этих тел происходит их деформация, то касание между ними происходит по некоторой площадке AB (рис.54). При действии силы $\overline{T}$ интенсивность давления около точки A убывает, а у очки B возрастает (рис.55).

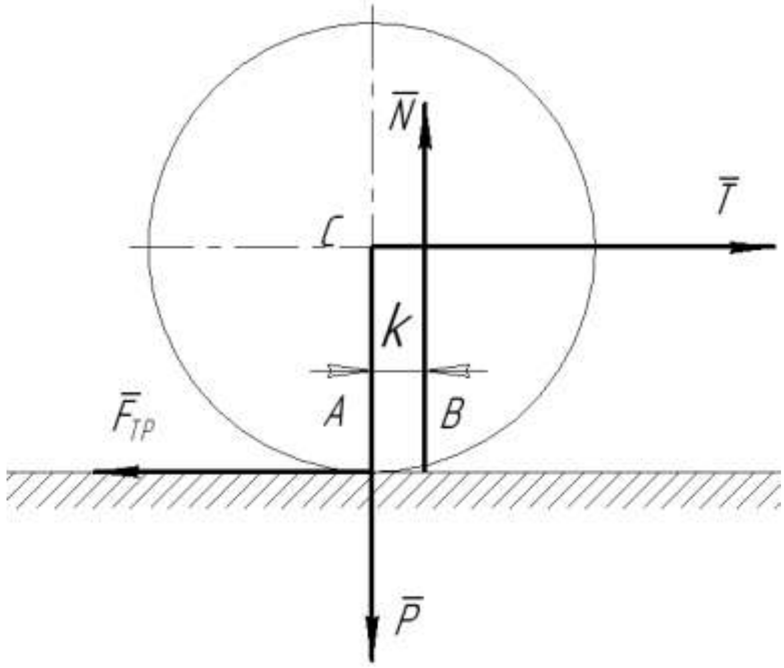


Рис.54

В результате реакция $\overline{N}$ (рис.55) оказывается смещенной в сторону действия силы $\overline{T}$. С увеличением силы $\overline{T}$ это смещение возрастает до некоторой предельной величины k.

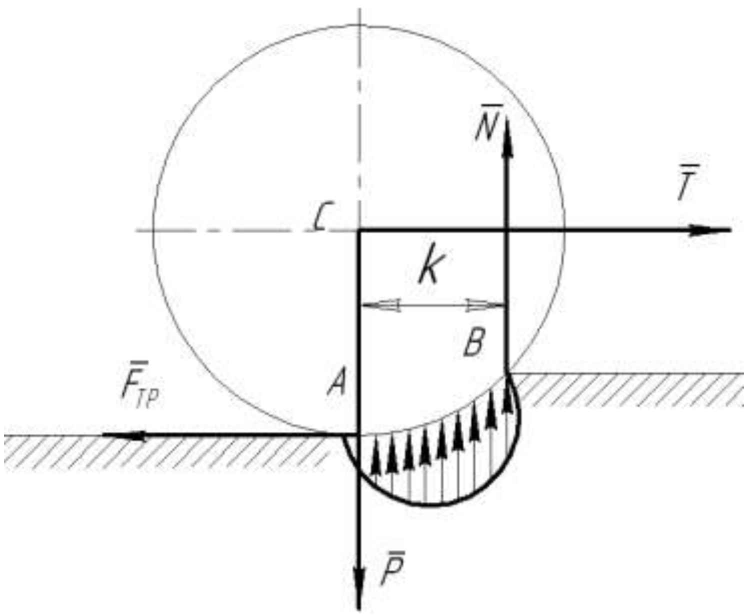


Рис.55

В результате получается , что на каток в предельном состоянии действуют пара $\overline{T}_{max}$, $\overline{F}$ с моментом T_{max}: R и уравновешивающая ее пара $\overline{N}$, $\overline{P}$ с моментом $N \cdot k$. Из равенства моментов $T_{max} \cdot R = N \cdot k$ находим $T_{max} = \dfrac{k \cdot N}{R}$.

Если $T < T_{max}$, каток находится в покое;

$T > T_{max}$ - начинается качение.

Величина k называется коэффициентом трения и качения и измеряется в линейных единицах (обычно в сантиметрах).

Значение коэффициента k зависит от материала тел и определяется опытным путем.

Дерево по дереву (колесо 0,05…0,08см)

Сталь мягка по стали и по рельсу (колесо 0,005см)

Сталь закаленная по стали (шариковый подшипник) 0,001 см.

Отношение $\dfrac{k}{R}$ для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0, что дает выгоду с энергетической точки зрения заменять трение скольжения трением качения. Этим объясняется широкое применение подшипников качения в технике.

Задача. Определить величину угла α, при котором цилиндр радиуса $R = 0{,}2$ м остается в покое на наклонной плоскости, если коэффициент трения качения равен $k = 2$ см.

Решение. Рассмотрим предельное положение равновесия, когда $\alpha = \alpha_1$ (рис.56). Разложим силы Р на две составляющие

$P_1 = P \cdot sin\alpha_1$

$P_2 = N = P \cdot cos\alpha_1$

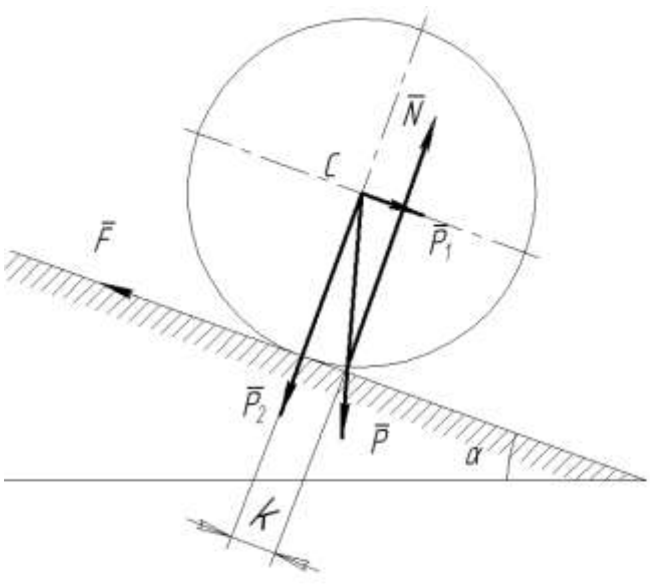


Рис.56

Силой, которая стремится покатить каток, будет $\overline{P_1}$, которая равна $\overline{P_1} = \frac{k \cdot N}{R}$;

Тогда $P \cdot \sin\alpha_1 = \frac{k \cdot P \cdot \cos\alpha_1}{R}$ или $tg\alpha_1 = \frac{k}{R}$; $\alpha_1 = arctg\frac{k}{R} \approx 5{,}7^0$.

$\alpha_1 = 5{,}7^0$.

11. Центр тяжести

11.1. Центр параллельных сил

Понятие центра параллельных сил используется для определения положений центра тяжести тел.

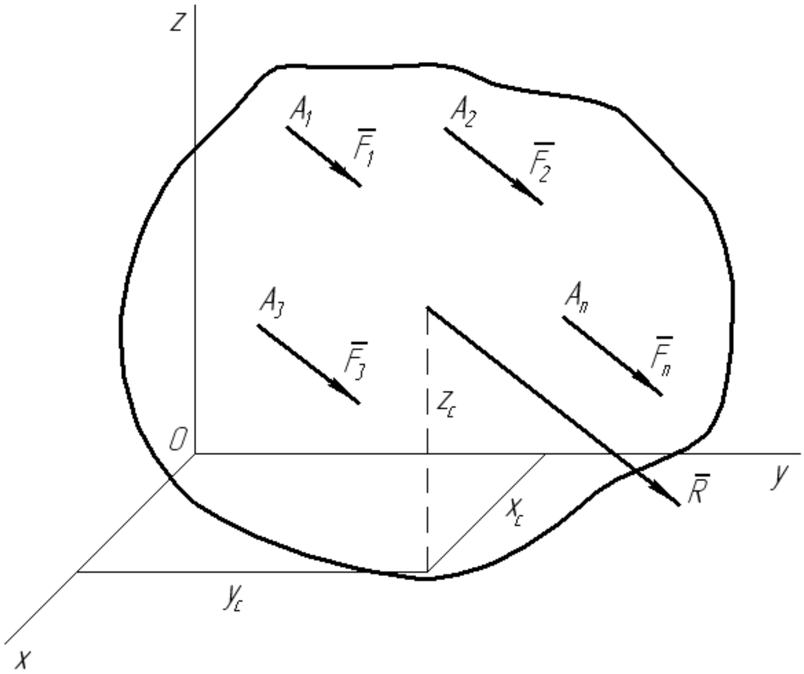


Рис.57

Система параллельных сил одинакового направления (рис.57), приложенных к твердому телу имеет равнодействующую

$$R = \sum F_k .$$

Точка С, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил, называется центром параллельных сил.

Координаты центра тяжести параллельных сил будут:

$$X_c = \frac{1}{R}\sum F_k \cdot x_k , \quad У_c = \frac{1}{R}\sum F_k \cdot y_k , \quad Z_c = \frac{1}{R}\sum F_k \cdot z_k .$$

11.2. Силовое поле. Центр тяжести твердого тела.

Область, в каждой точке которой на помещенную туда материальную частицу действует сила, зависящая от координат этой точки, называется силовым полем. В данном случае мы будем рассматривать стационарное силовое поле.

Если значение сил изменяется с течение времени, поле называется нестационарным. Примером стационарного силового поля является поле тяготения (поле сил тяжести к Земле).

На каждую частицу тела, находящегося вблизи поверхности, действует сила тяжести. Эти силы образуют поле сил тяжести (рис.58).

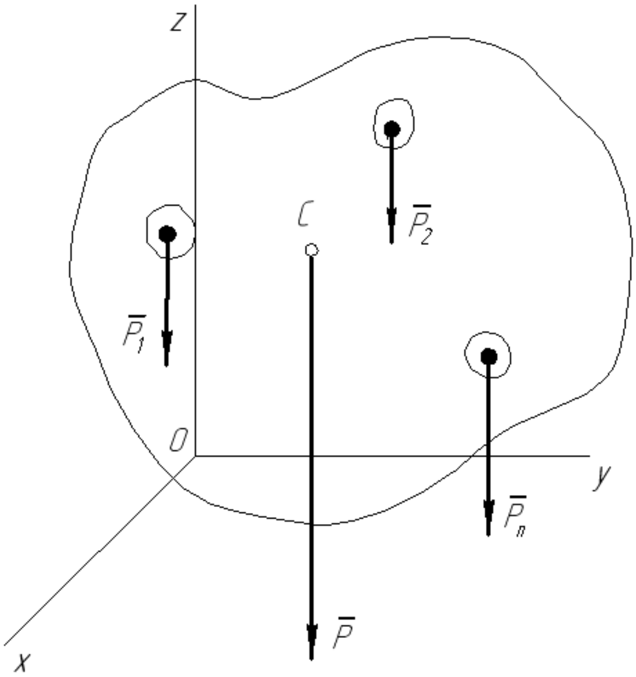


Рис.58

Силы тяжести, действующие на частицы, считаются параллельными друг другу (рис.58) и сохраняющие постоянное значение при любых поворотах тела. Если выполняются эти два условия, то такое поле тяжести называется однородным.

Равнодействующая сил тяжести определяется равенством $P = \sum P_k$ и называет весом тела. Точка С называется центром тела.

Координаты центра тяжести определяются формулами:

$$X_c = \frac{1}{P}\sum P_k \cdot X_k\,,\ У_c = \frac{1}{P}\sum P_k \cdot У_k\,,\ Z_c = \frac{1}{P}\sum P_k \cdot Z_k$$

где $X_k, У_k, Z_k$ - координаты точек приложения сил тяжести $\overline{P_k}$. Центр тяжести – это геометрическая точка; она может лежать и вне предела данного тела (например, для кольца).

11.3. Координаты центров тяжести однородных тел.

Для однородного тела, весом Р пропорционален объёму V

$P = \gamma \cdot V$

где γ - вес единицы объема.

Положение центра тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит и его координаты определяются формулами:

$$X_c = \frac{1}{V}\sum V_k \cdot X_k\,, \quad У_c = \frac{1}{V}\sum V_k \cdot У_k\,,\ Z_c = \frac{1}{V}\sum V_k \cdot Z_k\,.$$

где V - объем тела;

V_k - объем k-ой части тела.

Аналогично находятся координаты центра тяжести однородной плоской тонкой пластины

$$X_c = \frac{1}{S}\sum S_k \cdot X_k\,, \quad У_c = \frac{1}{S}\sum S_k \cdot У_k\,;$$

где S - площадь всей пластины;

S_k - площади ее частей.

Точку, координаты которой определяются этими формулами, называют центром тяжести площади S/

Формулы для координат центра тяжести линии:

$$X_C = \frac{1}{L}\sum l_k \cdot X_k\,,\ У_C = \frac{1}{L}\sum l_k \cdot У_k\,,\ Z_C = \frac{1}{L}\sum l_k \cdot Z_k\,,$$

где L – длина всей линии;

l_k - длины ее частей.

Таким образом, центром тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

11.4. Способы определения координат центров тяжести тел

1. Симметрия

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

2. Разбиение

Если тело разбивается на конечное число частей, для которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела определяются по ранее установленным формулам для однородных тел. При этом число слагаемых в каждой из сумм будет равно числу частей, на которые разбито тело.

Задача 1. Определить координаты центра тяжести однородной пластины, изображенной на рис.59. Размеры даны в сантиметрах.

Решение. Проводим оси $X, У$ и разбиваем всю пластину на три части: два прямоугольника и треугольник.

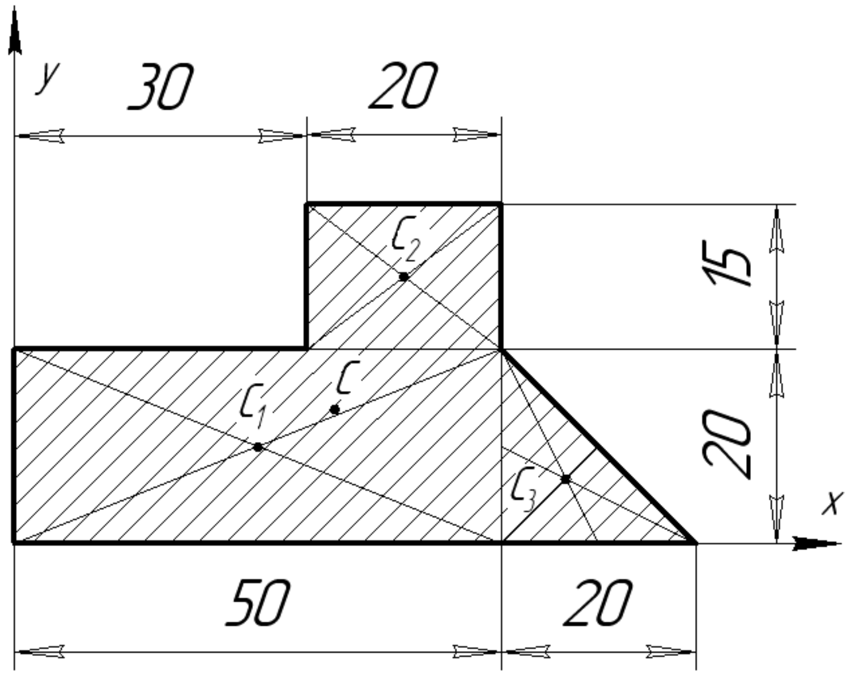


Рис.59

Вычисляем координаты центров тяжести C_1, C_2, C_3 каждой части и их площади S_1, S_2, S_3.

$S_1 = 50 \cdot 20 = 1000 см^2$, $S_2 = 20 \cdot 15 = 300 см^2$;

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 200 см^2$, $S = S_1 + S_2 + S_3 = 1500 см^2$.

$x_1 = 25 см$, $x_2 = 40 см$, $x_3 = 50 + \frac{20}{3} = 56\frac{2}{3} см$.

$y_1 = 10 см$, $y_2 = 27{,}5 см$, $y_3 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} см$.

Подставляя вычисленные значения в формулы для определения координат центра тяжести тонких пластинок (площадей), получим:

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S} = 32{,}2 см.$$

$$У_c = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{1500} = 13 см$$

3. Дополнение

Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если известны центры тяжести вырезанной части и без выреза.

Задача 2. Найти положение центра тяжести круглой тонкой пластинки радиуса $R = 18$ см, если из нее вырезан диск радиуса $r = 6\ см$ (рис.60). Расстояние $C_1C_2 = 10 см$.

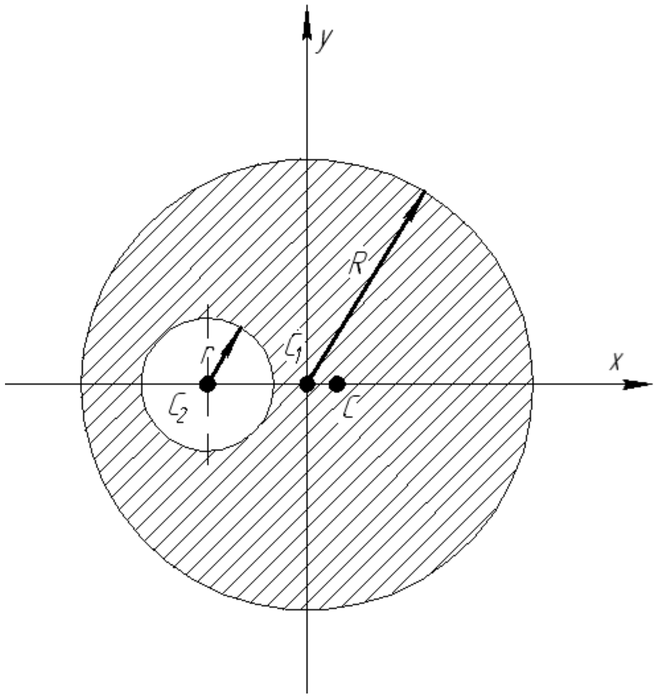


Рис.60

Решение. Центр тяжести пластины лежит на оси X, так как эта ось является осью симметрии.

Для определения X_c надо воспользоваться формулой

$X_c = \dfrac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S}$, где

$S = S_1 - S_2$, $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = \pi r^2$, $x_1 = 0$, $x_2 - 10$.

Подставив известные заданные значения, получим:

$S_1 = 1017{,}36 см^2$; $S_2 = 113{,}04 см^2$, $S = 904{,}32 с0^2$.

$X_c = 1{,}25 см$; $У_c = 0$.

4.Интегрирование.

Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положение центров тяжести которых известны, то для определения координат центров тяжести пользуются формулами:

$$X_c = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} x dV,\ У_c = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} y dV,\ Z_c = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} z dV.$$

$$X_c = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} x dS,\ У_c = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} y dS.$$

$$X_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x dl,\ У_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y dl,\ Z_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} z dl.$$

5. Экспериментальный способ

Этим способом определяются координаты центра тяжести неоднородных тел сложной конфигурации.

5.1. Метод подвешивания.

Суть этого метода состоит в том, что тело подвешивают на тросе за различные его точки. Направление гибкой связи, на которой подвешено тело, будет каждый раз давать направленные силы тяжести. Точка пересечения этих направлений определяет центр тяжести тела.

5.2. Метод взвешивания.

Суть этого метода заключается в том, что по известным реакциям и расстояниям между силами реакций находим вес тела, а затем определяем координаты центра тяжести.

Пример. Определить горизонтальную координату a (рис.61), если вес трактора Р, а расстояние между осями колес равно $AB = l$.

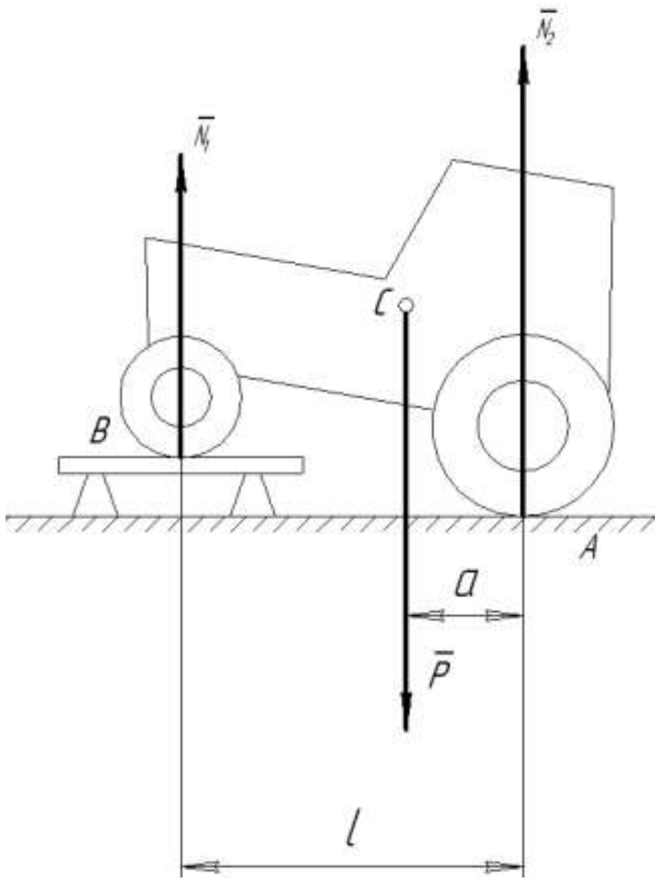


Рис.61

Решение. Для определения продольной координаты a воспользуемся методом взвешивания. Ставим переднее колесо В трактора на весы и определяем силу давления колеса на платформу весов. Численно эта сила равна реакции N_1. Точно так же определяем силу реакции N_2. Затем составляем уравнение моментов относительно центра тяжести С:

$\sum m_c(\overline{F}_k) = 0$, $N_2 \cdot a - N_1(l - a) = 0$, откуда

$a = \dfrac{N_1 \cdot l}{N_1 + N_2}$, где $P = N_1 + N_2$ - вес трактора.

Если значение Р известно по условию задачи, то для определения координаты a можно обойтись только однократным взвешиванием.

11.5. Координаты центра тяжести некоторых однородных тел.

1. Центр тяжести дуги окружности.

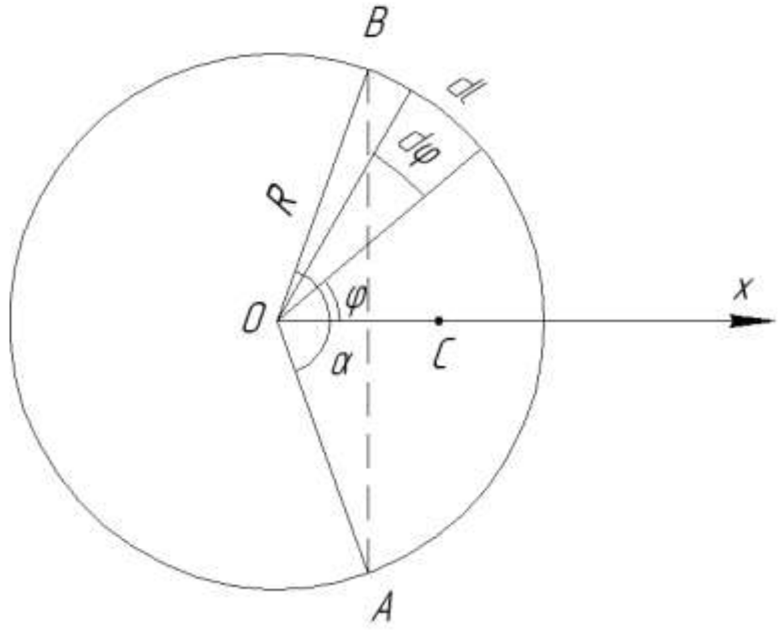


Рис.62

Рассмотрим дугу $\overset{\cup}{AB}$ радиуса R с центральным углом $\angle\ AOB = 2\alpha$.

В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси Ох (рис.62). Координата X_c находится по формуле:

$X_c = \dfrac{1}{L}\int_A^B xdl = \dfrac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} cos\,\varphi d\varphi = 2\dfrac{R^2}{L} sin\,\alpha$, так как длина дуги $AB = R \cdot 2\alpha$, то окончательно

$$X_c = \frac{R \cdot sin\,\alpha}{\alpha},$$

где α измеряется в радианах.

2. Центр тяжести площади треугольника

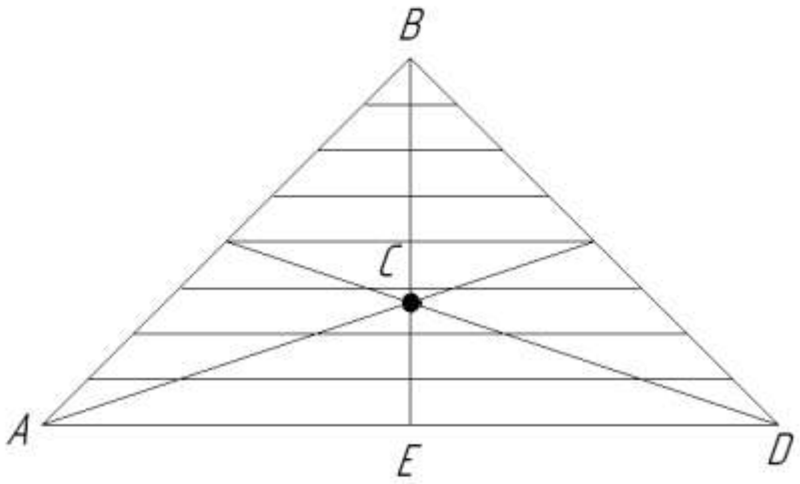


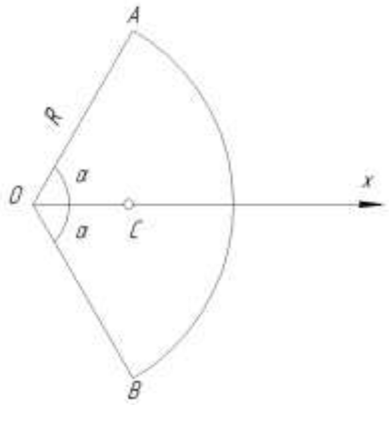
Рис.63

Разобьем площадь треугольника ABD (рис.63) прямыми, параллельными стороне AD, на ряд узких полосок. Центры тяжести этих полосок лежат на медиане BE треугольника.

Аналогичный результат получается для двух других медиан. Значит цент тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан:

$$CE = \frac{1}{3} BE .$$

3. Центр тяжести площади кругового сектора (рис.64).



$$X_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \cdot sin\alpha}{\alpha} .$$

Угол α измеряется в радианах.

Рис.64

4. Центр тяжести кругового сегмента (рис.65)

$$X_c = \frac{4R \cdot sin^3 \alpha}{3(2\alpha - sin 2\alpha)}$$

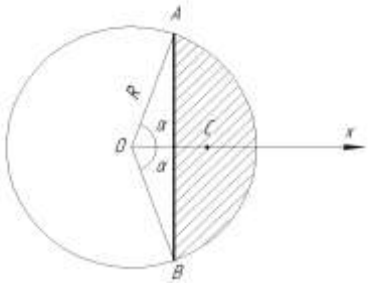
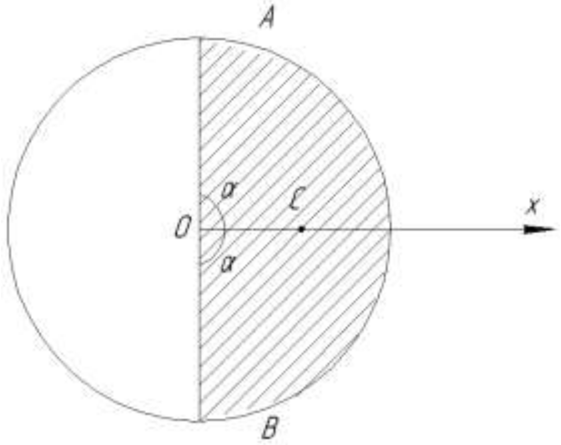


Рис.65

5. Центр тяжести полукруга (рис.66).



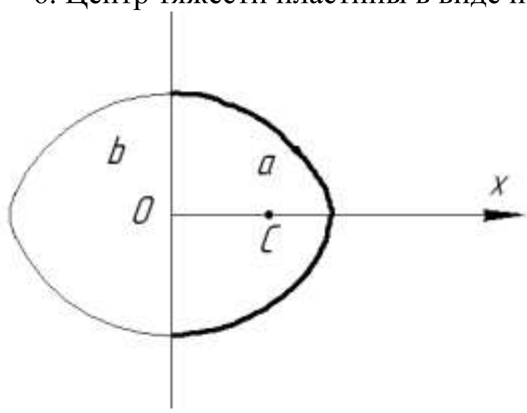
Центральный угол $OAB = 2\alpha$

$$\alpha = \frac{\pi}{2};$$

$$X_c = \frac{4R}{3\pi}$$

Рис.66

6. Центр тяжести пластины в виде половины эллипса (рис.67).

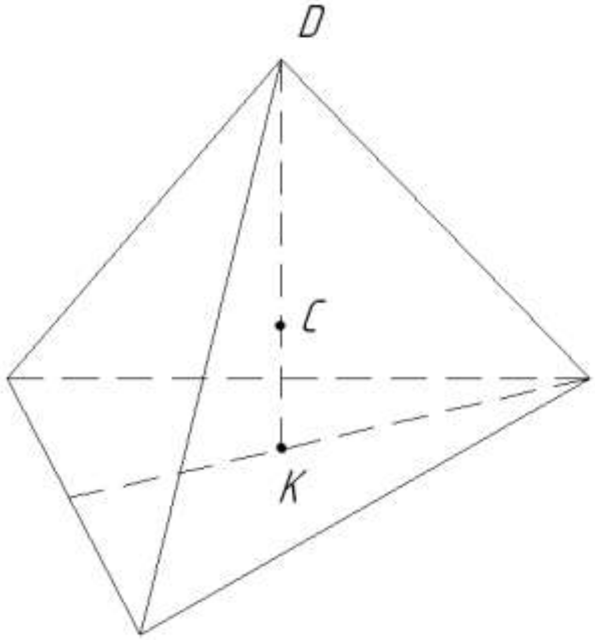


$$X_c = OC = \frac{4a}{3\pi},$$

где a - полуось, совпадающая с осью X.

Рис.67

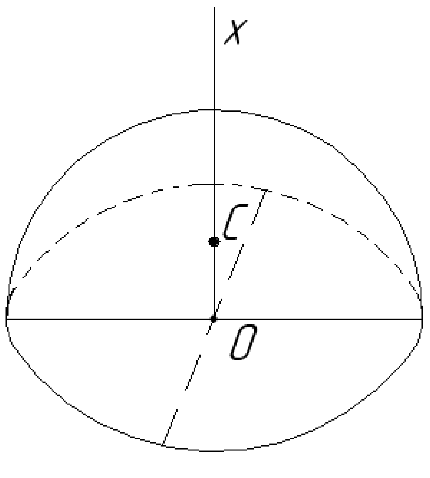
7. Центр тяжести объема пирамиды (или конуса) (рис.68)



$$CK = \frac{1}{4} DK$$

Рис.68

8. Центр тяжести объема полушара (рис.69)



$$X_c = OC = \frac{3}{8} R$$

где R-радиус шара (полушара).

Рис.69

Часть вторая

Кинематика

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические характеристики движения тел без учета их масс и действующих на них сил.

1.Кинематика точки

1.1. Введение

Под движением точки в механике понимают изменение положения тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движения тела (точки) в разные моменты времени жестко связывают какую-нибудь <u>систему отсчета</u> с другим телом, по отношению к которому рассматривается движение. Система отсчета изображается в виде трех координатных осей (не показывая тело, с которым эта система связана). Выбор системы отсчета в кинематике произволен и определяется целью исследования.

Пространство в механике будем рассматривать евклидово, т.е. все измерения осуществляем методами евклидовой геометрии.

За единицу длины при измерении расстояний принимается 1м. За единицу времени принимается 1с. Время является скалярной величиной, которое непрерывно меняется.

Задать движение тела (точки) - значит задать положение этого тела относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Непрерывная линия, по которой движется точка, называется <u>траекторией</u> точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется <u>прямолинейным,</u> а если кривая – <u>криволинейным</u>.

1.2.Способы задания движения точки

Существуют следующие способы задания движения точки: 1) векторный, 2) координатный, 3) естественный.

1. Векторный способ задания движения точки.

Этот способ позволяет определить положение этой точки в любой момент времени в системе отсчета Oxyz, задав ее радиус - вектор $\bar{r}$, проведенный из начала координат О в точку М (рис 70). Вектор $\bar{r}$ будет с течением времени изменяться и по модулю и по направлению. Следовательно,

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \qquad (1)$$

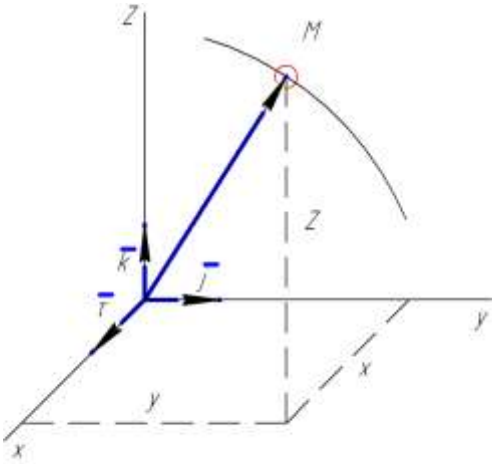


Рис.70

$\bar{r}$ является переменным вектором, зависящим от аргумента t. Геометрическое место концов вектора $\bar{r}$, т.е. годограф этого вектора, определяет траекторию движущейся точки. Равенство (1) определяет закон движения точки в векторной форме.

Также известно, что вектор $\bar{r}$ аналитически задается проекциями

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{i} + z\bar{k}, \qquad (2)$$

где $x = r_x$, $y = r_y$, $z = r_z$

Следовательно, зависимость (1) $\bar{r}$ от t будет известна, если будут заданы координаты x, y, z точки как функции времени.

2. Координатный способ задания движения точки

Положение точки можно определить ее декартовыми координатами x, y, z, которые при движении точки будут с течение времени изменяться. Т.е., если знать зависимости

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t), \qquad (3)$$

то можно получить закон движения точки (положение в пространстве) в любой момент времени.

Уравнения (3) представляют собой уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Эти уравнения представляют собой закон движения точки при координатном способе задания движения.

Если движение этой точки происходит в плоскости Оху, то закон движения точки будет:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t). \qquad (4)$$

Если точка движется по прямой, параллельной оси Ox, то закон прямолинейного движения будет:

$$x = f(t) \qquad (5)$$

3. Естественный способ задания движения точки

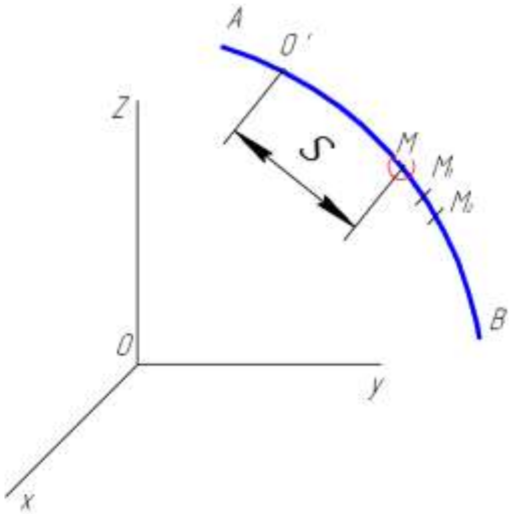


Рис. 71

Естественным способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть кривая АВ является траекторией точки М (рис.71). Точка O' начало отсчета. Тогда положение точки М на траектории однозначно будет определяться криволинейной координатой S, взятой с соответствующим знаком.

<u>Дуговая координата S</u> – это длина дуги траектории, отсчитываемая от точки O' до точки М.

<u>Закон движения точки М считается</u> известным, если:

$$S = f(t) \qquad (6)$$

Т.е., если известна зависимость (6), то положение точки М можно определить в любой момент времени.

Чтобы задать движение точки естественным способом, надо знать:

а) траекторию точки;

б) начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета;

в) закон движение в виде $S = f(t)$.

Обращаем внимание на то, что величина S в уравнении (6) определяет положение движущейся точки, а не определенный ею путь.

1.3. Вектор скорости точки

1.3.1 Скорость точки при векторном способе задания движения

Основной кинематической характеристикой движения точки является скорость.

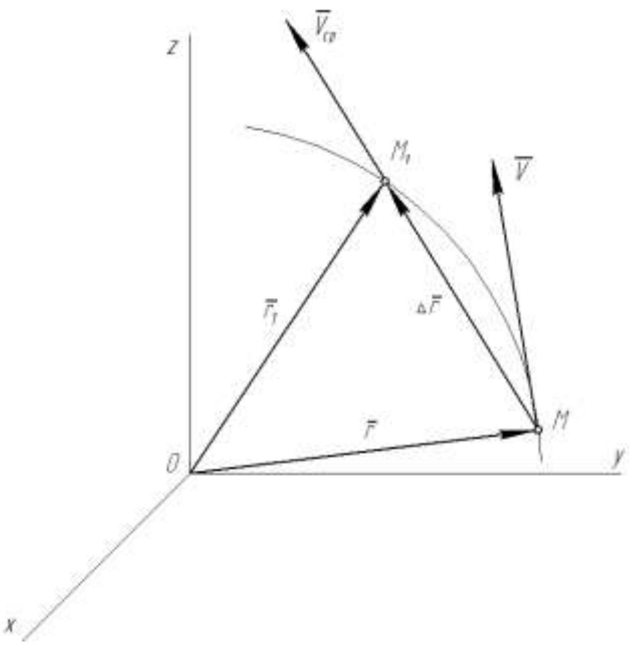


Рис.72

Пусть точка М в момент времени t находилась в положении М, а в момент t_1 - в положении M_1. Положение этих точек определяется соответственно векторами $\overline{r}$ и $\overline{r_1}$. Перемещение точки (рис.72) за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ будет $\Delta\overline{r} = \overline{r}_1 - \overline{r}$, где средняя скорость $\overline{V_{cp}} = \dfrac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}$ (7)

Скоростью точки в данный момент времени t называется векторная величина $\overline{V}$, равная:

$\overline{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(\overline{V_{cp}}) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$, т.е.,

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}. \qquad (8)$$

Итак, вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиус-вектора точки по времени и направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

1.3.2. Скорость точки при координатном способе здания движения

При этом способе задания движения положения точки в пространстве задается:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Любой вектор $\overline{r}$ можно разложить в виде векторной суммы

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$$

Используя равенство (8), получим

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k} \qquad (9)$$

С другой стороны вектор скорости $\overline{V}$ можно разложить на составляющие:

$$\overline{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} \qquad (10)$$

Сопоставляя (9) и (10), получаем

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \qquad V_z = \frac{dz}{dt}. \ (11)$$

По проекциям скорости на оси координат определяем ее модуль

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \qquad (12)$$

Зная проекции скорости, определяем и направление (т.е. углы α, β, γ, которые вектор $\overline{V}$ образует с координатными осями)

$$cos\alpha = \frac{V_x}{V},\ cos\,\beta = \frac{V_y}{V},\ cos\,\gamma = \frac{V_z}{V} \quad (13)$$

1.3.3. Скорость точки при естественном способе здания движения

Числовое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от расстояния (криволинейной координаты) S этой точки по времени t.

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}.$$

1.4. Вектор ускорения точки

1.4.1. Ускорение точки при векторном способе задания движения

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение модуля и направления скорости с течением времени.

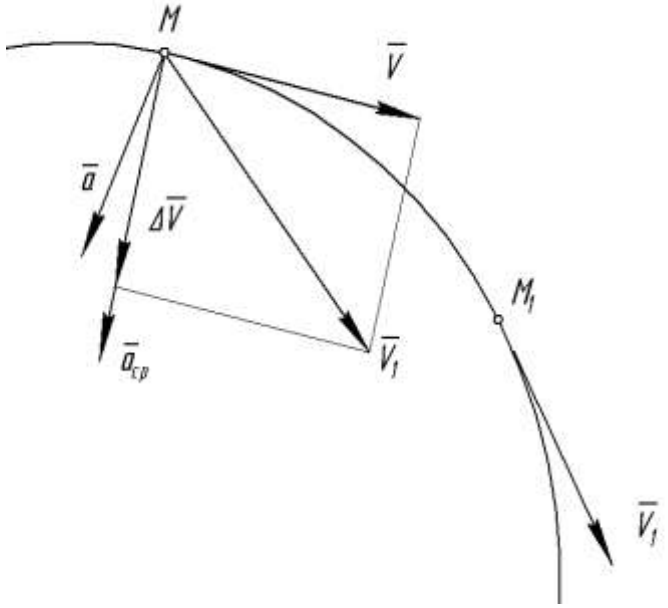


Рис.73

Пусть в некоторый момент времени t точка находится в положении M и имеет скорость $\overline{V}$, а в момент t_1 занимает положение M_1 и имеет скорость $\overline{V_1}$ (рис.73) . Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки получим приращение $\Delta\overline{V} = \overline{V_1} - \overline{V}$. Вектор $\Delta\overline{V}$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой. Отношение приращения вектора скорости $\Delta\overline{V}$ к Δt определяет вектор $\overline{a}_{cp}$ точки за этот промежуток времени:

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t}$$

Перейдя к пределу, получим

$$\bar{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} \text{ или}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \qquad (15)$$

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

Размерность ускорения обычно - $м/с^2$

1.4.2. Ускорение точки при координатном способе задания движения.

Модуль ускорения определяется:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (16)$$

a_x, a_y, a_z - проекции ускорения на оси координат вектора $\bar{a}$, где

$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$

$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$.

Направления ускорений находятся:

$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{a}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{a}$.

Касательное ускорение вычисляется при помощи выражения

$$a^\tau = \left|\dot{V}\right| = \left|\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{V}\right| = \left|\frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V}\right| \qquad (17)$$

Если движение происходит в одной плоскости, то во всех формулах должна быть отброшена проекция на ось z.

В случае прямолинейного движения, которое задается одним уравнением $x = f(t)$, будет

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \qquad (18)$$

1.4.3. Ускорение точки при естественном способе задания движения

Введем понятие кривизны кривой линии.

Угол между касательными, проведенными к кривой в точках M и M_1, называется углом смежности $\Delta\varphi$ (рис. 74).

Отношение угла смежности $\Delta\varphi$ к соответствующему отрезку дуги ΔS называют средней кривизной линии на этом отрезке:

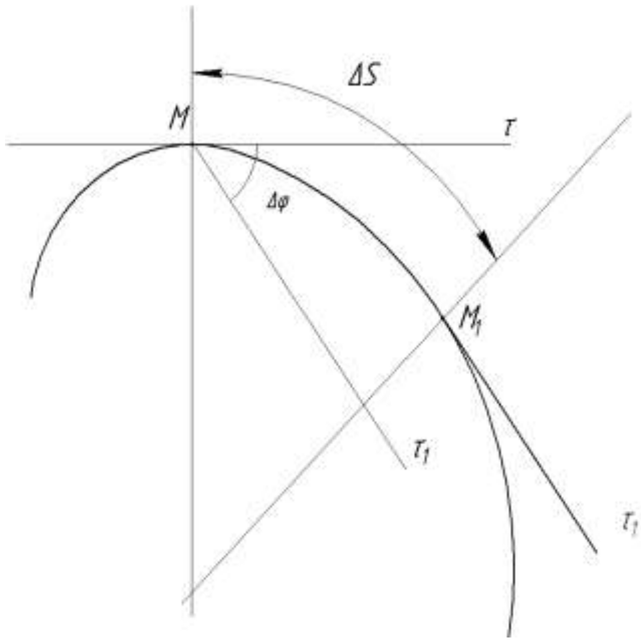


Рис.74

$$K_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$$

Переходя к пределу, получим кривизну кривой в данной точке кривой

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}. \qquad (19)$$

Кривизна окружности радиуса R будет

$$k = \frac{1}{R} \qquad (20)$$

и постоянна в любой ее точке. Кривизна кривой в данной точке и радиус круга кривизны будут связаны отношением:

$$K = \frac{1}{\rho} \qquad (21)$$

Используя естественные оси координат, векторы скорости и ускорения точки, имеем

$$\bar{a} = \bar{a}^{\tau} + \bar{a}^{n} \qquad (22)$$

где $V = \dot{S}$, $a^{\tau} = \ddot{S}$, $a^{n} = \dfrac{V^2}{\rho}$.

Вектор ускорения точки $\bar{a}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\bar{a}_{\tau}$ и $\bar{a}_{n}$ (рис. 75)

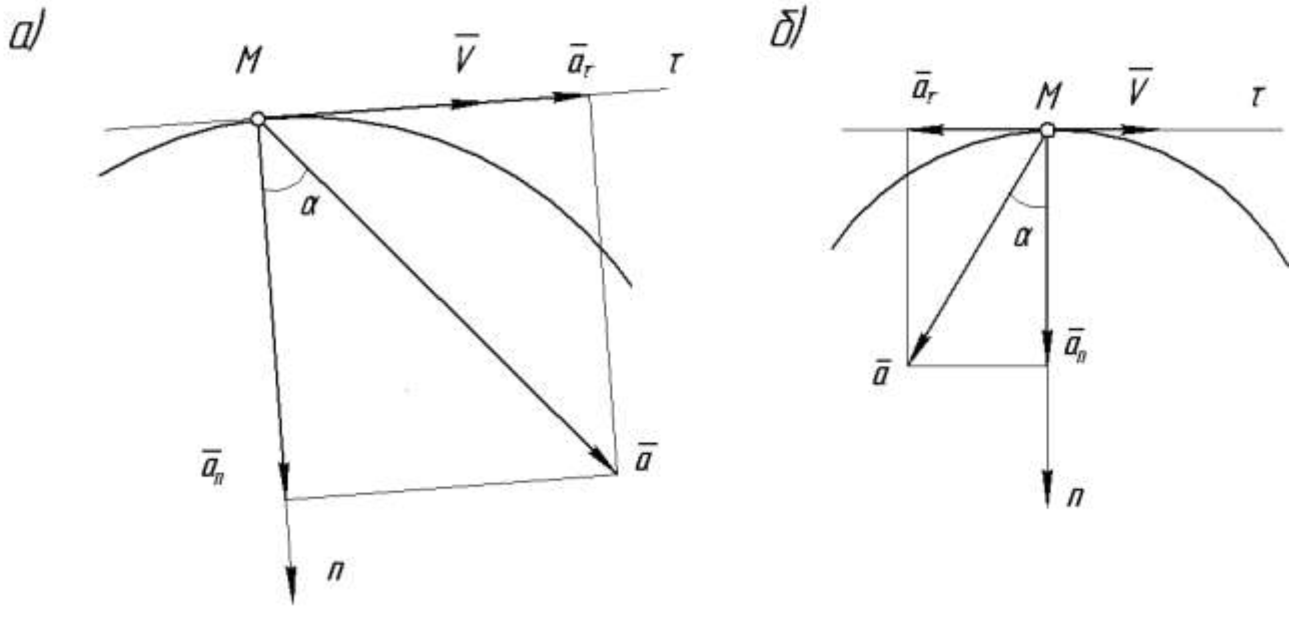


Рис.75

Так как эти составляющие взаимно перпендикулярны, то модуль и угол α его отклонения от нормали определяется формулами:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad (23)$$

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} \qquad (24)$$

где $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$; при $\alpha > 0$ вектор $\bar{a}$ отклонен от нормали Mn (рис 6.а) в сторону оси Мτ , а при $\alpha < 0$ - в противоположную сторону (рис. 6 б)

1.4.4. Частные случаи движения точки

1. Прямолинейное движение

Здесь траекторией является прямая линия:

$\rho = \infty$. Тогда $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$.

Значит $a = a_\tau = \frac{dV}{dt} = \dot{V}$ (25)

Так как в данном случае скорость по направлению не меняется, а изменяется лишь численное значение, то отсюда следует, что касательное ускорение характеризует изменение численного значения скорости.

2.Равномерное криволинейное движение

Здесь числовое значение скорости остается постоянным: $V = const$. Тогда

$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$ и

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho} \qquad (26)$$

Отсюда заключаем, что нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Вектор ускорения $\bar{a}$ направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Закон равномерного криволинейного движения точки будет

$$S = S_0 + vt \qquad (27)$$

3.Равномерное прямолинейное движение

$a_n = a_\tau = 0$, а значит $a = 0$

Это единственное движение, в котором ускорение точки все время равно нулю.

4. Равномерное криволинейное движение

Оно происходит, если $\alpha_\tau = const$. Тогда

$$V = V_0 + a_\tau t \qquad (28)$$

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} \qquad (29)$$

Если в равенстве (28) V и a_τ имеют одинаковые знаки, движение будет равноускоренным, а если разные знаки, - равнозамедленным.

Гармонические колебания

Это прямолинейное движение точки, когда расстояние x от начала координат изменяется по закону $x = A\cos \kappa t$, (30)

где A и k – постоянные величины. При таком законе точка совершает колебательные движения. Происходят гармонические колебания.

Величина A – амплитуда колебаний;

k - частота колебаний;

$T = \frac{2\pi}{k}$ - период колебаний (31)

Аналогичные колебания происходят при законе

$x = A \cdot \sin kt$

Беря производные от x по t (формула 30) найдем значение скорости и ускорения точки:

$$V = V_x = -Ak \sin kt, \; a = a_x = -Ak^2 \cos kt \qquad (32)$$

Из (32 видно), что скорость и ускорение точки изменяются с течением времени по гармоническом закону.

1.5. Решение задач

Задача 1. Движение точки задано уравнениями:

$x = 2t^2 + 1; \; y = 2t$, где x и y - координаты (см). Найти положение точки на траектории, ее скорость, полное касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории через t= 1 с после начала движения.

Решение 1. Найдем уравнение траектории. Для этого исключим время t из параметрических уравнений. Получаем $x = \frac{1}{2} y^2 + 1$, т.е. траекторией точки является парабола, построенная на рисунке 76. Найдем положение точки через одну секунду (t =1c)

x =3 см; y = 2 см.

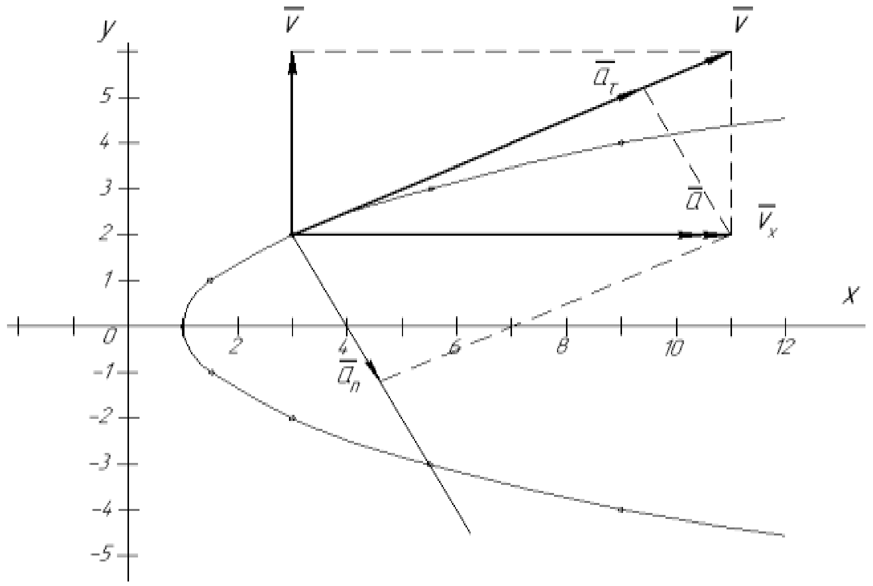


Рис.76

2. Найдем значение (модуль) скорости через время t = 1c. По формуле (12)

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

$V_x = \dot{x} = 4t$; $V_y = \dot{y} = 2$. При $t_1 = 1c$, получим $V_x = 4 \,{}^{см}\!/_{c}$; $V_y = 2 \,{}^{см}\!/_{c}$

Тогда $V = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47 \,{}^{см}\!/_{c}$.

Изображаем направление вектора скорости $\overline{V}$, учитывая знаки V_x и V_y.

3. Определяем ускорение точки $\overline{a}$.

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = 4 \,{}^{см}\!/_{c^2}$.

4. Определим тангенциальное ускорение $\overline{a}^\tau$.

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{4 \cdot 4}{4{,}47} = 3{,}58 \,{}^{см}\!/_{c^2}$$

5. Найдем нормальное $\overline{a}_n$ ускорение

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4^2 - 3{,}58^2} = 1{,}8 \,{}^{см}\!/_{c^2}.$$

6. Определим радиус кривизны траектории ρ.

$a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$. Имеем $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = \dfrac{4{,}47^2}{1{,}8} = 11{,}1 см$.

Задача 2. При малых углах отклонения груз маятника (рис.77) движется по окружности радиуса $R = 20\ см$ по закону $S = 10 sin\dfrac{\pi}{3}t$ см (начало отсчета принять в точке O). Найти скорость V и ускорение a

Груза через время t = 1 с после начала движения.

Решение. По известным формулам (14) , (17), (26) находим:

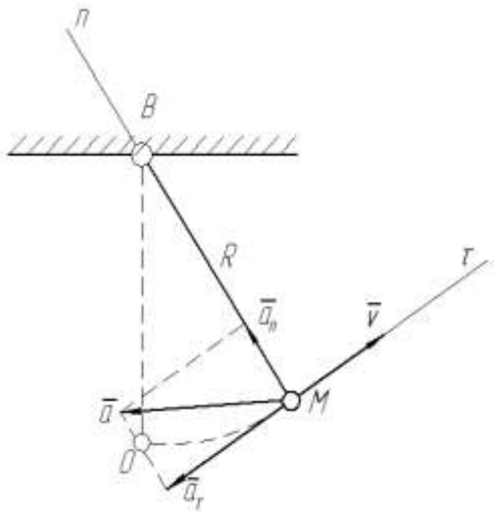


Рис.77

$V = \dot{S} = \dfrac{10\pi}{3} cos\dfrac{\pi t}{3}$, при t = 1с имеем $V = 5{,}2\, ^{см}/_{с}$

$a_\tau = \dot{V} = -\dfrac{10}{9}\pi^2\ sin\dfrac{\pi t}{3}$, через $t = 1с$ имеем

$a_\tau = -9{,}5\, ^{см}/_{с^2}$

$a_n = \dfrac{V^2}{R} = \dfrac{5{,}2^2}{20} = 1{,}4\, ^{см}/_{с^2}$

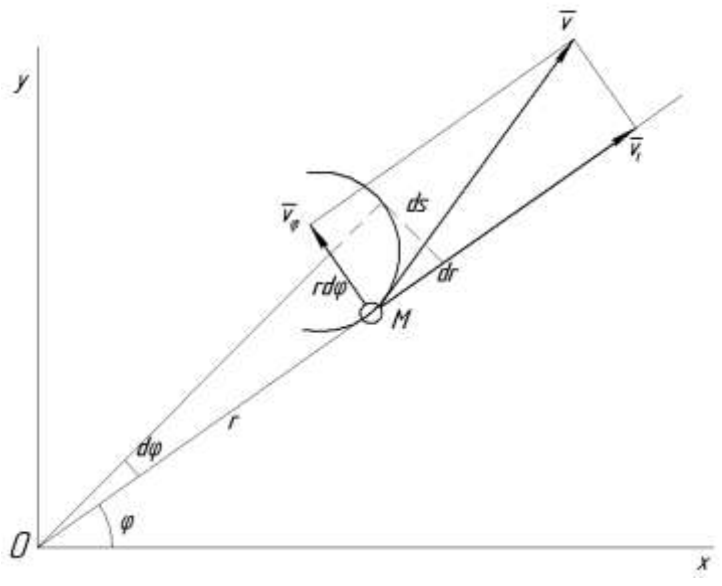
$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(-9{,}5)^2 + 1{,}4^2} = 9{,}6\, ^{см}/_{с^2}$

Тангенциальное ускорение $\overline{a_\tau}$ имеет направление, которое противоположно вектору скорости $\overline{V}$.

2.6. Скорость и ускорение точки в полярных координатах

При движении точки в одной плоскости ее положение удобно определять полярными координатами r и φ (рис.78):

$$r = f_1(t),\ \varphi = f_2(t) \qquad (32)$$



Так как $V = \dfrac{dS}{dt}$, где перемещение dS геометрически слагается из реального перемещения, численно равного dr, и поперечного перемещения $r \cdot d\varphi$. Следовательно, скорость $\overline{V_r}$ и поперечной скорости $\overline{V_\varphi}$, численно равных

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r},\ V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} \qquad (33)$$

Рис.78

Так как $\overline{V_r}$ и $\overline{V_\varphi}$ взаимно перпендикулярны, то по модулю

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} \qquad (34)$$

Формулы (33) и (34) определяют скорость точки в полярных координатах при плоском движении. Нетрудно вывести, что $a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)^2}$ (35)

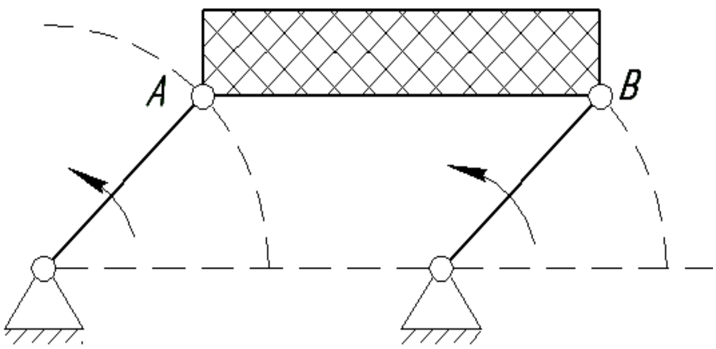
где $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$

2. Поступательное и вращательное движения твердого тела

2.1. Поступательное движение

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями (рис.79).



Например:

1. движение спарника АВ в параллелограммном механизме (рис.10);
2. движение кабинок в «колесе обозрения»;
3. движение вагона на прямом горизонтальном участке.

Рис.79

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения:

$\overline{V}_A = \overline{V}_B$; $\overline{a}_A = \overline{a}_B$

2.2 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-либо две его точки остаются неподвижными.

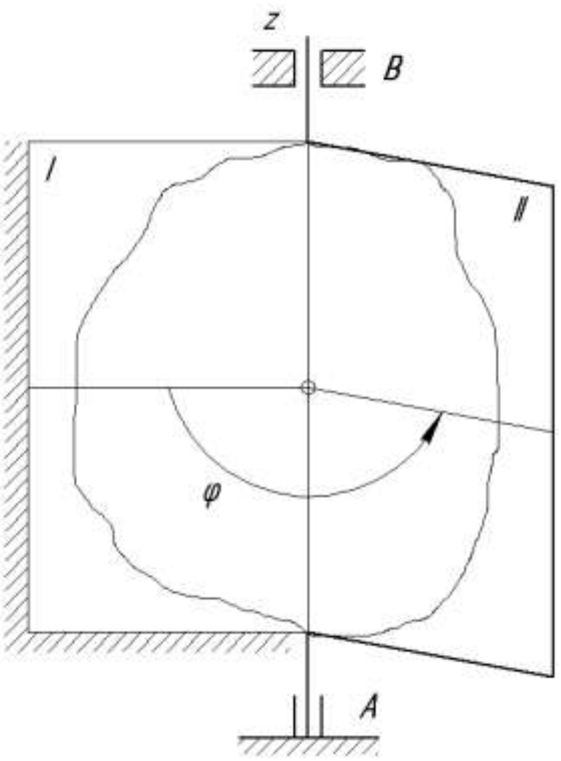


Рис.80

Прямая, проходящая через эти две точки называется осью вращения (рис.80).

Так как расстояния между точками у твердого тела не изменяются, то при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения.

Если полуплоскость I неподвижна, а полуплоскость II вращается вместе с телом, то положение тела однозначно определяется углом φ, который называется углом поворота тела. Считается угол φ положительным, если для наблюдателя, смотрящего с положительно конца оси Az, поворот тела осуществляется против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t:

$$\varphi = f(t) \qquad (36)$$

Уравнение (36) есть закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \dot{\varphi}$$

Знак ω определяет направление вращения тела. Если вращение происходит против хода часовой стрелки, то $\omega > 0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega < 0$.

Размерность угловой скорости $\frac{1}{T}$ ($\frac{рад}{c}$ или $\frac{1}{c}$ или c^{-1}), так как радиан величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изображать в виде вектора $\overline{\omega}$, модуль которого равен $|\omega|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис.81).

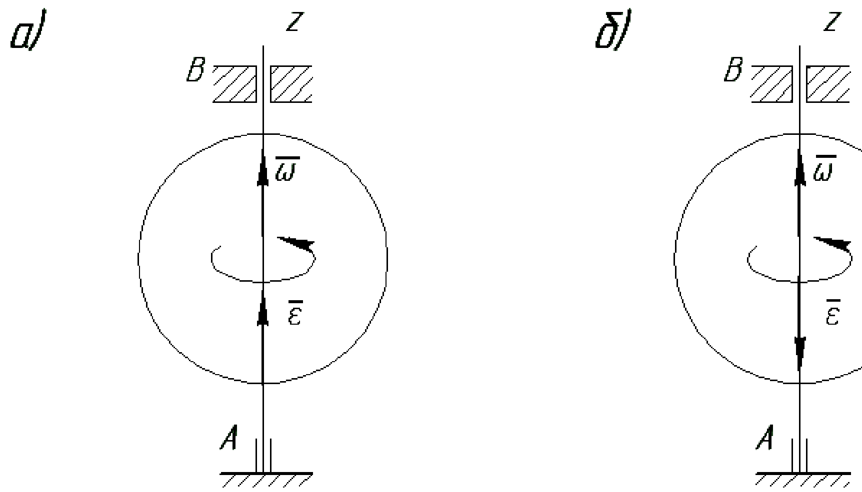


Рис.81

Угловое ускорение ε характеризует изменение угловой скорости ω с течением времени и численно равно

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \qquad (38)$$

Размерность углового ускорения $\frac{1}{T^2}$ ($\frac{рад}{c^2}$ или $\frac{1}{c^2}$ или c^{-2}).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется <u>ускоренным</u>, а если убывает, - <u>замедленным</u>.

Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, то вращение будет ускоренным, и замедленным, - когда разные. Угловое ускорение тела изображается в виде вектора $\overline{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \qquad (38^*)$$

Направление $\overline{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\overline{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рис. 12, а). При замедленном вращении направление векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ противоположное (рис. 12, б).

Если угловая скорость тела остается постоянной $\omega = const$, то вращение тела называется равномерным и закон равномерного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \qquad (39)$$

При равномерном вращении зависимость между n об/мин и ω рад/с будет:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n \qquad (40)$$

Если угловое ускорение $\varepsilon = const$, то вращение называется равнопеременным и закон равнопеременного вращения будет

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (41)$$

где $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ - закон изменения угловой скорости (42)

Если скорость ω и ε имеют одинаковые знаки, вращение будет равноускоренным, а если разные – равнозамедленным.

Числовое значение (модуль) скорости точки при вращательном движении будет (рис.13)

$$V = \omega \cdot R \qquad (43)$$

Скорость $\overline{V}$ в отличие от угловой скорости ω тела называют линейной или окружной скоростью точки М.

Направлена скорость точки М по касательной к окружности, т.е. перпендикулярно радиусу в сторону вращения (по направлению дуговой стрелки ω) (рис.82).

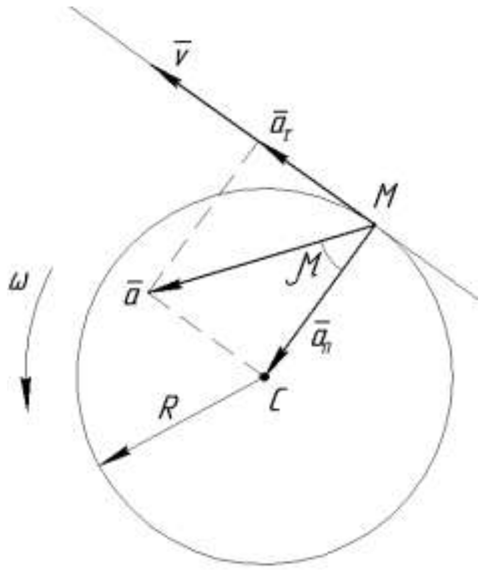


Рис.82

Из формулы (43) следует, что скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения.

После скоростей точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис.83.

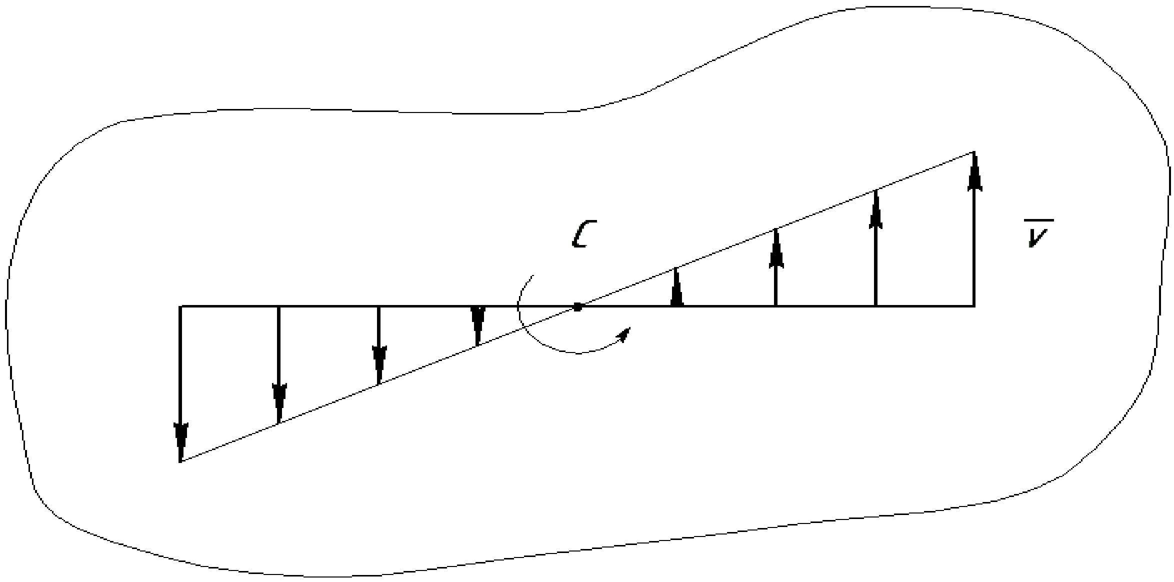


Рис.83

Ускорения точек тела имеют вид (рис.82)

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R \tag{44}$$

Касательная составляющая ускорения $\overline{a}_\tau$ направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при замедленном). Нормальное ускорение $\overline{a}_n$ всегда направлено по радиусу к оси вращения. Полное ускорение точки М будет

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \text{или} \quad a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{45}$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса определяется углом μ, который равен

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} \quad \text{или} \quad tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \tag{46}$$

Согласно формулам (45) и (46) поле ускорений точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис. 84.

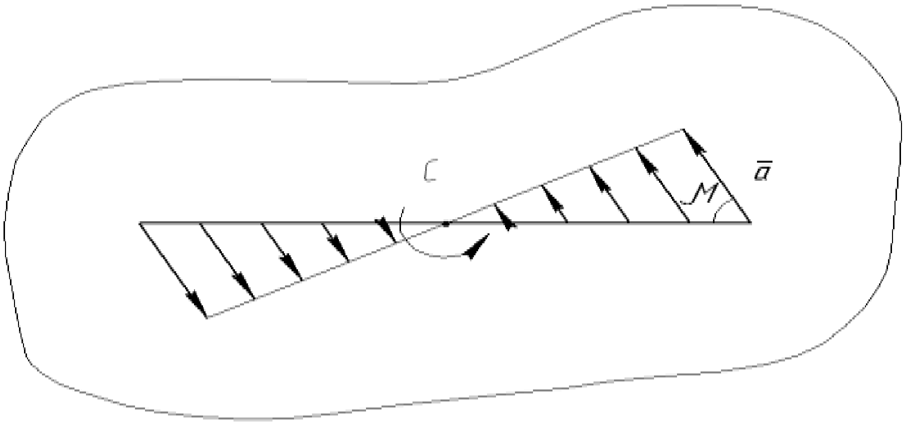


Рис.84

Непосредственные выражения для векторов $\overline{V}$ и $\overline{a}$ будут иметь вид (рис.85)

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r} \qquad (47)$$

$$\overline{a} = \left(\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right) + \left(\overline{\omega} \times \overline{V}\right) \qquad (48)$$

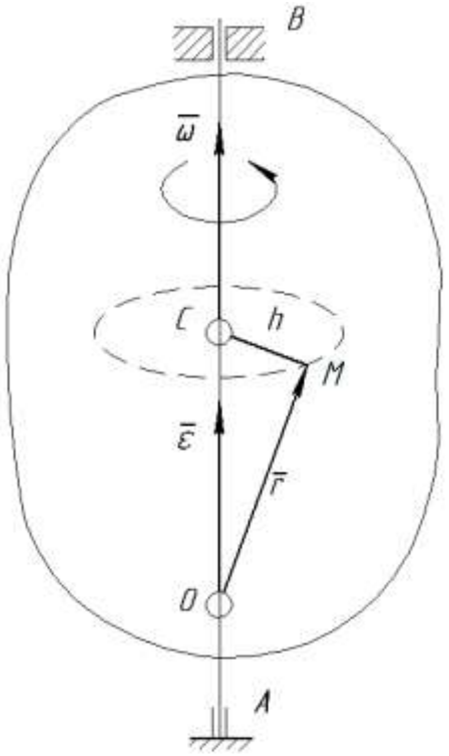


Рис.85

Вектор $\overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ направлен как и вектор $\overline{\omega} \times \overline{r}$ по касательной к траектории точки М.

Вектор $\overline{\omega} \times \overline{V}$ направлен вдоль МС, т.е. по нормали к траектории точки М. Учитывая это, заключаем, что

$$\overline{\varepsilon} \times \overline{r} = \overline{a}_\tau, \quad \overline{\omega} \times \overline{V} = \overline{a}_n \qquad (49)$$

Задача. Движение груза 1 описывается уравнением

$x = 3t^2 + 4t + 7$, где t – время.

Определить в момент времени $t_1 = 2c$ скорость и ускорение груза и точки М, лежащей на поверхности одного из колес, если радиусы колес равны $R_2 = 100см$, $r_2 = 70см$, $R_3 = 80см$.

Решение. Скорость груза 1 (см. рис.86)

$V = \dot{x} = 6t + 4$ (a)

Ускорение груза 1

$\bar{a} = \dot{V} = \ddot{x} = 6 \, см/c^2$

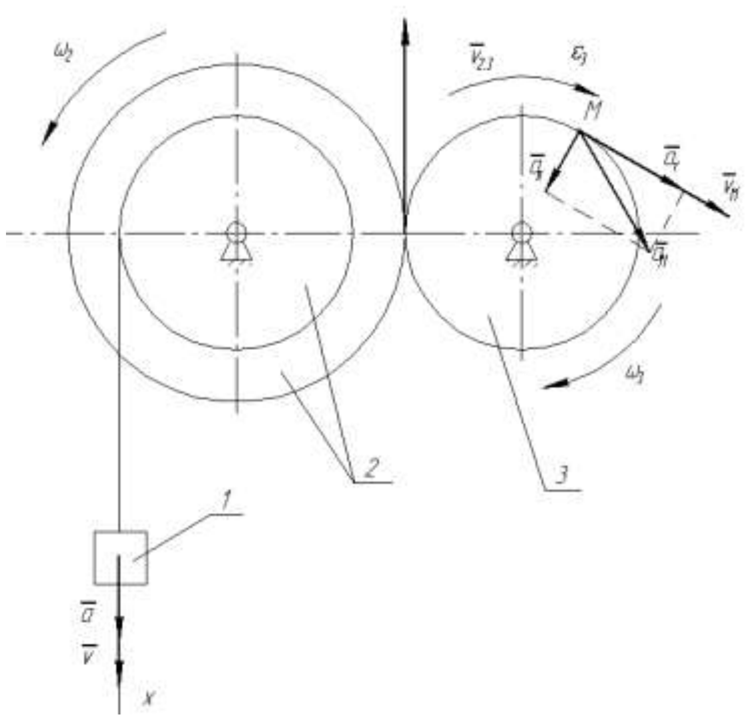


Рис.86

В момент времени $t_1 = 2c$ скорость груза 1 $V = 16 \, см/c$.

Определим скорость и ускорение точки М. Для этого запишем уравнения, связывающие скорость груза V и угловые скорости колес ω_2 и ω_3.

В соответствии со схемой механизма

$V = \omega_2 \cdot r_2$, $R_2\omega_2 = \omega_3 R_3$, т.к. $V_2 = V_3$,

откуда $\omega_2 = \dfrac{V}{r_2}$. Тогда

$R_2 \cdot \dfrac{V}{r_2} = \omega_3 \cdot R_3$ или

$\omega_3 = \dfrac{R_2 \cdot V}{r_2 \cdot R_3}$ или учитывая формулу (а) после подстановки данных

$\omega_3 = 0{,}1t + 0{,}07$ или $\omega_3 = 0{,}27 \dfrac{рад}{c}$.

Тогда скорость точки М будет

$V_м = R_3 \cdot \omega_3 = 80 \cdot 0{,}27 = 21{,}6 \, см/c$.

Касательное ускорение точки М вычисляется по формуле

$a_\tau = R_3 \cdot \varepsilon_3 = 13{,}6 \, см/c^2$.

Нормальное ускорение точки М находим по формуле

$a_n = R_3 \cdot \omega_3^2 = 5{,}8\, см/с^2$.

Полное ускорение точки М

$a_м = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2} = 14{,}8\, см/с^2$.

Скорости и ускорения тела 1 и точки М показаны на рис.17.

3. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным (или плоским) называют такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Например, катящееся колесо на прямолинейном участке дороги, шатун в кривошипноползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

3.1 Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

Для движения всего тела достаточно рассмотреть движение сечения S в какой-нибудь плоскости Оху (рис.87).

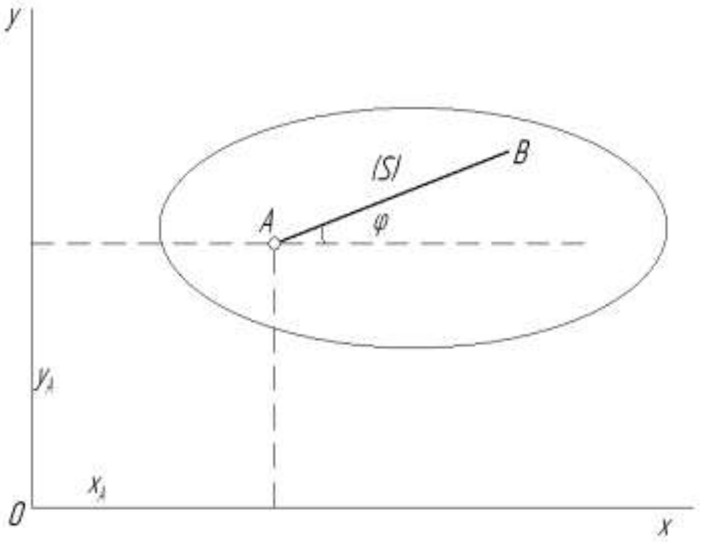


Рис.87

Положение фигуры S в плоскости Оху определяется положением какого-нибудь отрезка АВ, лежащего в этой плоскости. Положение самого отрезка АВ можно определить, зная координаты x_A, y_A точки А и угол φ, который отрезок АВ образует с осью x. Точку А, выбранную для определения положения фигуры S, будем называть полюсом.

При движении фигуры S будут меняться величины x_A, y_A и φ. Чтобы знать закон движения фигуры S в плоскости Оху в любой момент времени, надо знать зависимости

$$x_A = f_1(t),\ y_A = f_2(t),\ \varphi = f_3(t) \qquad (50)$$

Уравнения (50) являются уравнениями плоского движения твердого тела.

Первые два уравнения определяют движение при $\varphi = const$; это будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как и полюс А. Третье уравнение определяет движение, когда полюс А неподвижен ($x_A = const$ и $y_A = const$); это будет вращение фигуры вокруг полюса А. Поэтому движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающее из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же , как полюс А, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

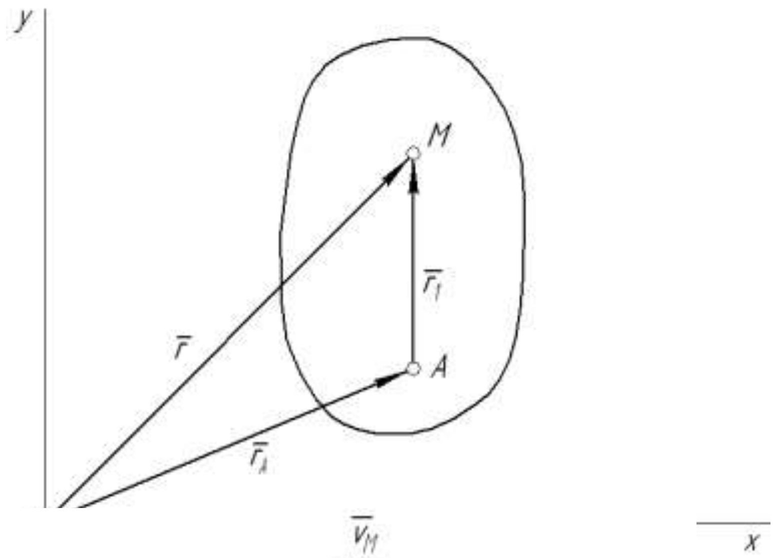
Основными кинематическим характеристиками плоского движения фигуры являются скорость и ускорение поступательного движения , равные скорости и ускорения полюса ($\overline{V}_{пост} = \overline{V}_A$, $\overline{a}_{пост} = \overline{a}_{пост} = \overline{a}_A$), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε .

При изучении движения можно в качестве полюса выбирать любую точку фигуры. Поступательная часть движения от выбора полюса зависит. Вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

3.2. Скорости точек плоской фигуры.

Положение любой точки М плоской фигуры (рис.88) определяется по отношению к осям Оху радиус-вектором.

$$\overline{r} = \overline{r}_A + \overline{r_1}$$



Тогда $V_м = \dfrac{d\overline{r}}{dt} = \dfrac{d\overline{r}_A}{dt} + \dfrac{d\overline{r_1}}{dt}$

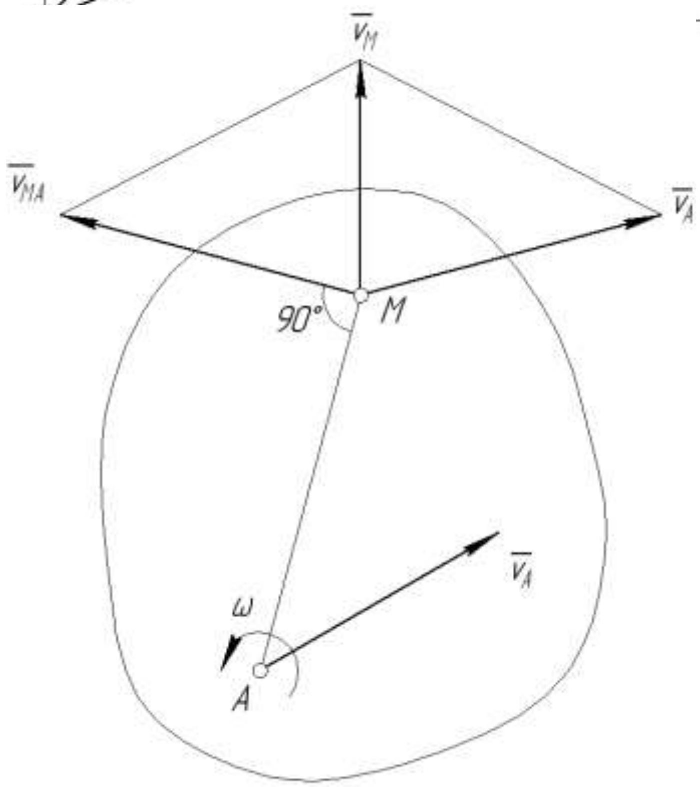
где $\dfrac{d\overline{r_A}}{dt} = \overline{V_A}$ - скорость полюса.

$\dfrac{d\overline{r_1}}{dt} = \overline{V}_{MA}$ - скорость точки М при вращении фигуры вокруг полюса А.

Таким образом

$$\overline{V}_м = \overline{V}_A + \overline{V}_{MA} \ , \qquad (51)$$

Рис.88



$$V_{MA} = \omega \cdot MA \ \left(\overline{V}_{MA} \perp \overline{MA}\right), \qquad (52)$$

где ω - угловая скорость фигуры.

Скорость любой точки М плоской фигуры геометрически складывается из скорости, которую точка М получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

Модуль и направление скорости находится построением соответствующего параллелограмма. (рис.89).

Но скорость точек плоской фигуры можно получать более простым способом, чем по формуле (51). Один из таких способов дает теорема: проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу (рис.90).

Рис.89

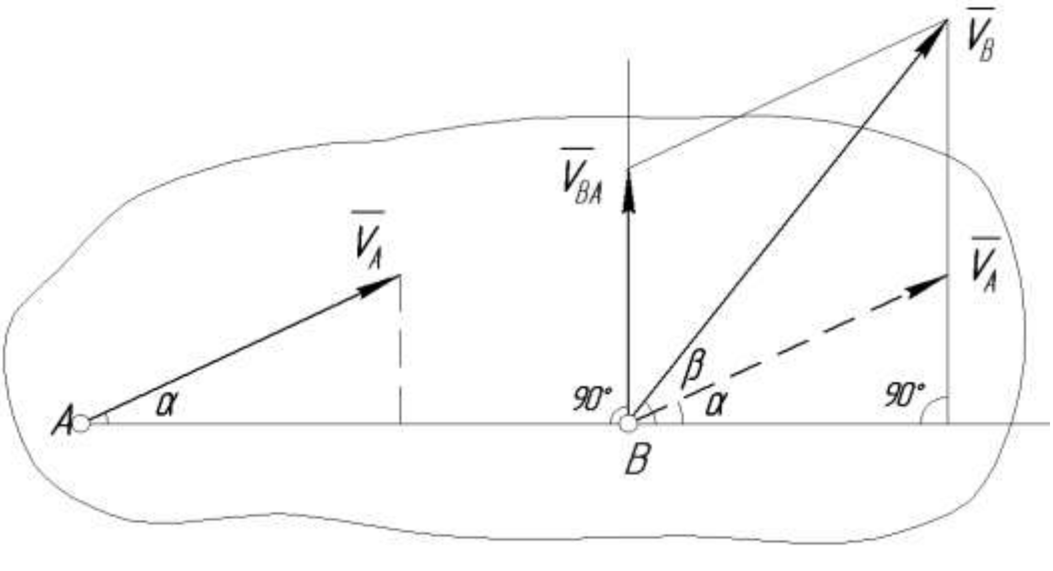


Рис.90

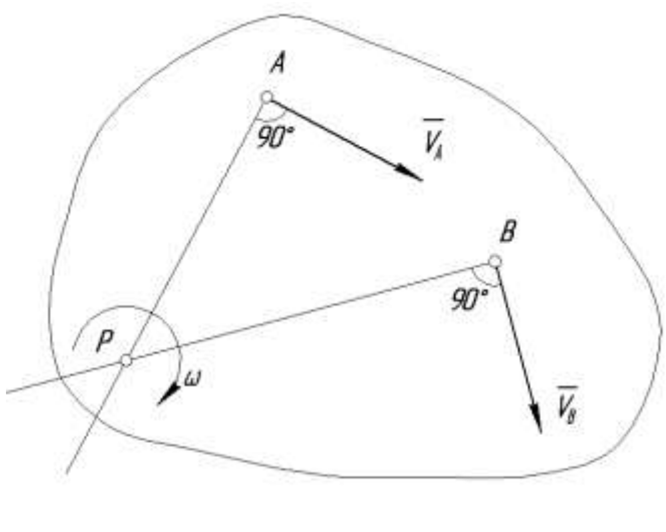
Так как $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$ и проектируя обе части равенства на ось, проходящую через прямую АВ, и учитывая, что $\overline{V}_{AB} \perp \overline{AB}$, получаем

$$V_B \cdot cos\,\beta = V_A \cdot cos\,\alpha \qquad (53)$$

3.3. Мгновенный центр скоростей

Простым и наглядным методом определения скоростей точек плоской фигуры основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.



Если тело движется непоступательно, то всегда (в любой момент времени) существует такая единственная точка скорость которой равна нулю.

Пусть в момент времени t точка А имеет скорость $\overline{V}_A$, а точка В – скорость $\overline{V}_B$. Тогда точка Р, лежащая на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей и будет мгновенным центром скоростей.

Скорости точек плоской фигуры Рис.91 определяется в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей (рис.91)

$$V_A = \omega \cdot PA \qquad (\overline{V}_A \perp PA);$$

$$V_B = \omega \cdot PB \qquad (\overline{V}_B \perp PB). \qquad (54)$$

Из равенства (54) следует

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}, \qquad (55)$$

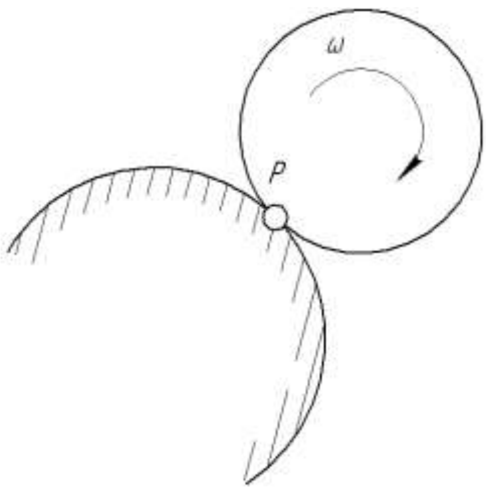
Из (54) и (55) следует:

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\overline{V_A}$ и $\overline{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры.
2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь точки A фигуры и направление скорости и направление скорости другой ее точки.
3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P:

$$\omega = \frac{V_B}{PB}.$$

3.4. Частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

1. Если плоское движение происходит путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка P катящегося



тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис.23) имеет в данный момент времени скорость, равную нулю ($V_P = 0$), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей. Примером служит качения колеса по рельсу.

2. Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, и прямая AB не

перпендикулярна $\overline{V}_A$ (рис.92), то мгновенный центр

Рис.92

скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны $\overline{V}_A$. Значит фигура имеет мгновенно поступательное распределение скоростей (мгновенно поступательное движение). Угловая скорость ω тела в этот момент времени равна нулю.

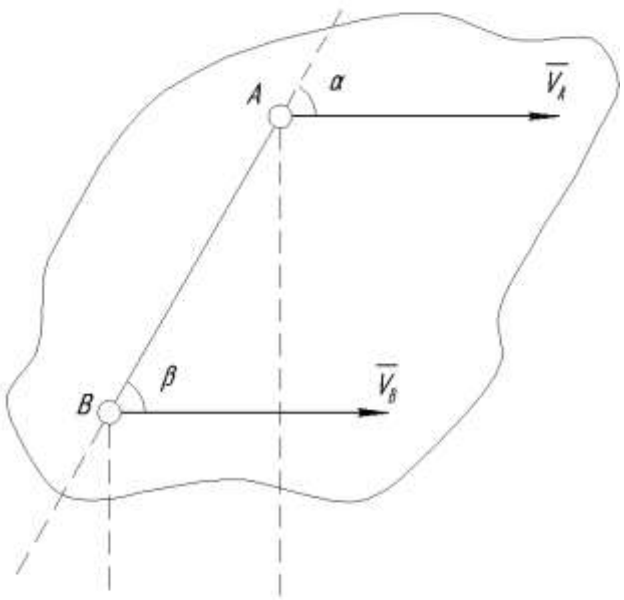
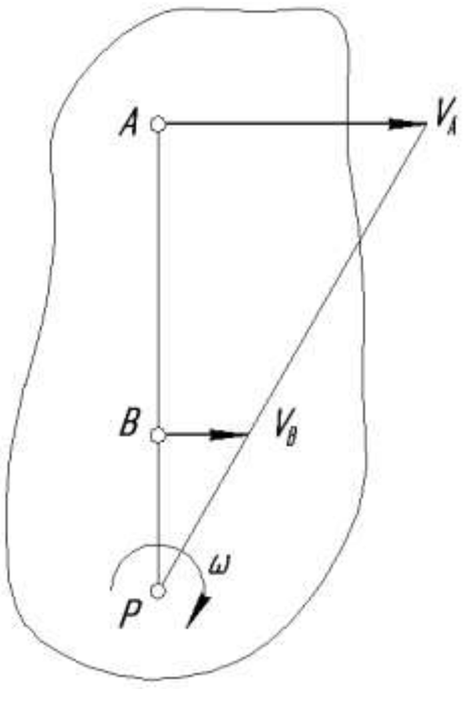


Рис.93

3.Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна $\overline{V}_A$, то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рисунке 93.



Справедливость построений следует из пропорции (55). В этом случае для определения центра P надо знать еще и модули скоростей $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$.

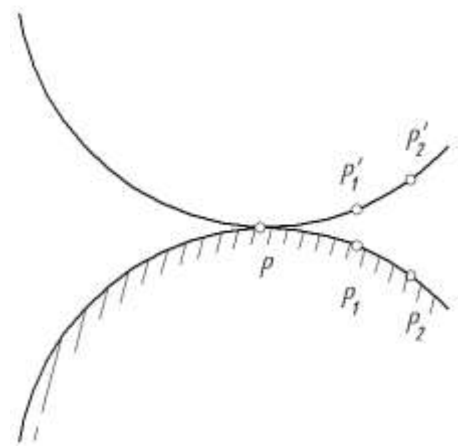
4. Если известны вектор скорости $\overline{V}_B$ какой-нибудь точки B фигуры и ее угловая скорость ω, то положение мгновенного центра скоростей P, лежащего на перпендикуляре к $\overline{V}_B$ (см. рис.94), можно найти из равенства

$$BP = \frac{V_B}{\omega}.$$

Рис.94

3.5. Мгновенный центр вращения центроиды

Точка неподвижной плоскости, совпадающая с мгновенным центром скоростей, называется мгновенным центром вращения (точки $P, P_1, P_2 \ldots$) (см.рис.95), а ось Pz, перпендикулярна сечению S тела и проходящая через точку P, - мгновенная ось вращения тела. Мгновенная ось вращения тела отличается от неподвижной тем, что она все время меняет свое положение. Таким образом, можно дать еще одну геометрическую картину плоского движения: плоскопараллельное движение слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг непрерывно меняющих свое положение мгновенных осей (или центров) вращения.

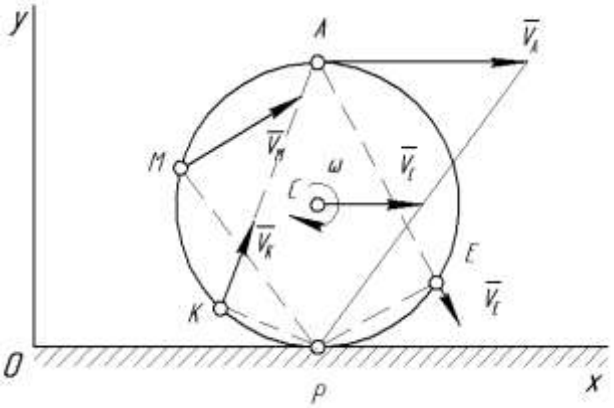


Геометрическое место мгновенных центров вращения, т.е. положение точки P на неподвижной плоскости, называют <u>неподвижной центроидой</u>, а геометрическое место мгновенных центров скоростей, т.е. положений точки P на движущейся фигуре – <u>подвижной центроидой</u>.

Пересекаться центроиды не могут. В каждый момент времени при плоском движении происходит качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

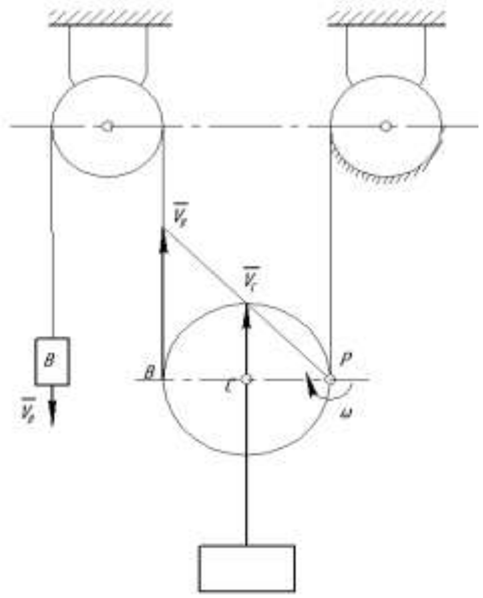
Рис.95

Очевидно, что для колеса, изображенного на рис.96, ось Ox является неподвижной центроидой, а окружность - подвижной.



Задача 1. Определить скорость центра C подвижного блока радиуса r =12 см и его угловую скорость ω, если груз B окажется со скоростью $V_B = 20 \, {}^{см}\!/\!_{с}$. Нить при своем движении не растягивается, не проскальзывает и ее ветви вертикальны (рис.97).

Рис.96



Решение. Так как нить не проскальзывает, то скорость точки В равна скорости груза В.

$V_B = \omega \cdot BP$ отсюда имеем $\omega = \dfrac{V_B}{BP} = ,83\dfrac{рад}{с}$. Тогда скорость точки С

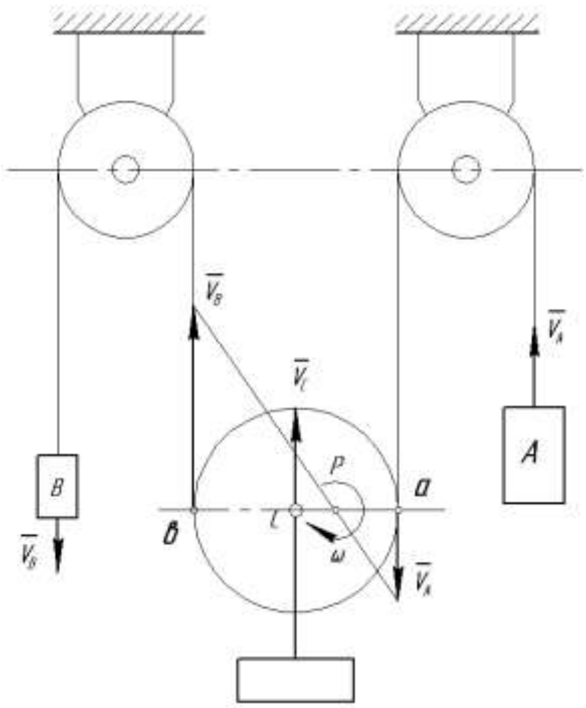
$V_c = \omega \cdot cP = 0{,}415\, {см}/{с}$

Рис.97

Задача 2.Определить скорость центра С подвижного блока радиуса $r = 15\ см$ и его угловую скорость ω(рис.98), если скоростью $V_A = 0{,}8\, {м}/{с}$, а груз В опускается со скоростью $V_B = 2\, {м}/{с}$. Нить при своем движении не растягивается.

Решение. Так как нить при своем движении не проскальзывает и не растягивается, то скорости точек a и b блока равны по модулю скоростям грузов:

$V_a = V_A, \quad V_b = V_B.$



Так как по условию задачи $V_B > V_A$ и зная их численное значение, находим положение мгновенного центра скоростей Р подвижного блока (рис.98). Скорость центра С блока изображаем вектором $\overline{V}_c$. Для определения угловой скорости ω составим геометрическое равенство (пропорцию):

$\dfrac{V_A}{aP} = \dfrac{V_B}{bP}$; где $bP = ab - aP$.

Отсюда находим расстояние aP, решая пропорцию

$V_A \cdot (ab - aP) = V_B \cdot aP, \qquad aP = 8{,}6$ см, где CP=6,4 см.

Рис.98

Тогда $\omega = \dfrac{V_A}{aP} = 9{,}3\dfrac{рад}{с}$.

Определяем скорость V_c точки С:

$V_c = \omega \cdot CP = 9{,}3 \cdot 6{,}4 = 59{,}52\, см/с$. $V_c = 0{,}6\, м/с$.

3.6. Ускорения точек плоской фигуры.

Положение точек М определяется радиус-вектором.

$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}_1$, где $\bar{r}_1 = A\bar{M}$

Тогда $\bar{a}_M = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} + \dfrac{d^2\bar{r}_1}{dt^2}$, где

$\dfrac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} = \bar{a}_A$, $\dfrac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} = \bar{a}_{MA}$.

Следовательно,

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA} \qquad (56)$$

Значение $\bar{a}_{MA}$, как ускорения вращающегося твердого тела, определяется по формулам (45) и (46):

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},\ tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \qquad (57)$$

где ω и ε - угловая скорость и угловое ускорение фигуры, а μ - угол между векторами $\bar{a}_{MA}$ и отрезком МА (рис.99).

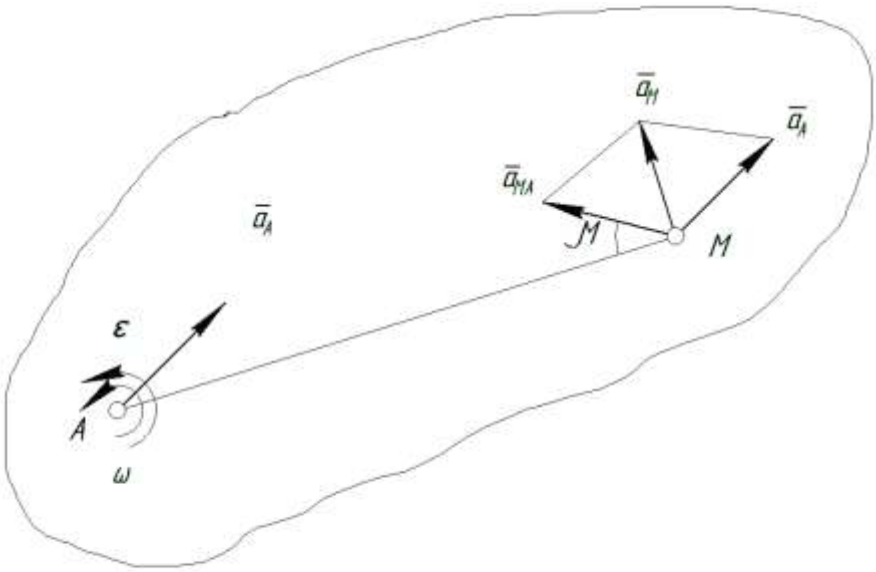


Рис. 99

При решении задач удобнее вектор $\bar{a}_{MA}$ разложить на две составляющие $\bar{a}^{\tau}_{MA}$ и $\bar{a}^{n}_{MA}$ и пользоваться равенством в виде

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{MA} + \bar{a}^{n}_{MA}, \qquad (58)$$

где $\overline{a}_{MA}^{\tau} \perp \overline{AM}$, вектор $\overline{a}_{MA}^{\tau}$ всегда направлен от точки М к полюсу А (рис.100)

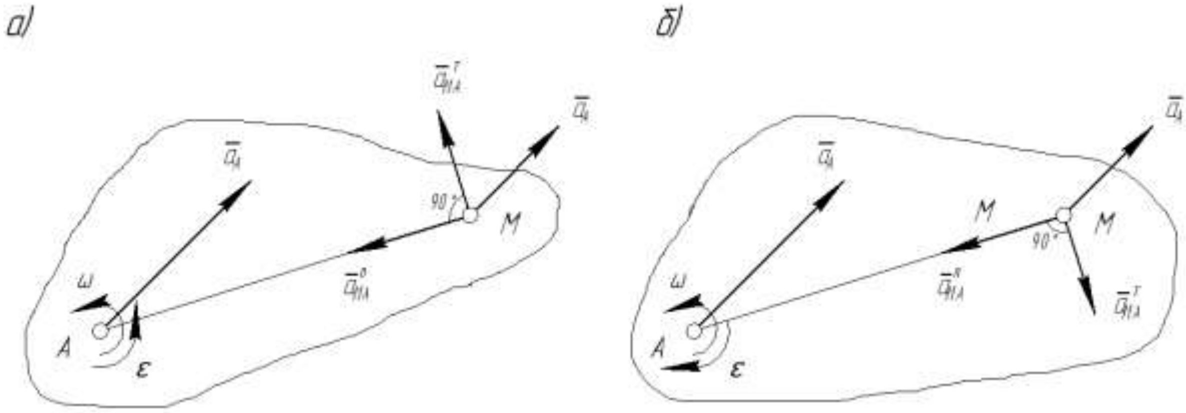


Рис.100

Вектор $\overline{a}_{MA}^{\tau} \perp \overline{a}_{MA}^{n}$ и направлен в сторону вращения, если движение ускоренное (рис. 100, а), и против вращения, если оно замедленное (рис.100, б).

$$\overline{a}_{MA}^{\tau} = AM \cdot \varepsilon\,, \quad \overline{a}_{MA}^{n} = AM \cdot \omega^2. \qquad (59)$$

Если полюс А движется не прямолинейно, то его ускорение можно представить двумя составляющими $\overline{a}_{A}^{\tau}$ и $\overline{a}_{A}^{n}$, т.е.

$$\overline{a}_A = \overline{a}_{A}^{\tau} + \overline{a}_{A}^{n} \qquad (60)$$

Тогда

$$\overline{a}_M = \overline{a}_{A}^{\tau} + \overline{a}_{A}^{n} + \overline{a}_{MA}^{\tau} + \overline{a}_{MA}^{n} \qquad (61)$$

Задача. По неподвижному колесу 1 радиуса $r_2 = 0{,}4м$ катится колесо 2 радиуса $r_2 = 0{,}2м$, насаженному на кривошипы ОА (рис.101). Кривошип вращается с угловой скоростью $\omega = 2\,{}^{рад}\!/_{с}$, имея угловое ускорение $\varepsilon = 3\,{}^{рад}\!/_{с^2}$. Определить в этот момент времени ускорение точки В, лежащей на ободе неподвижного колеса, когда радиус АВ перпендикулярен кривошипу ОА.

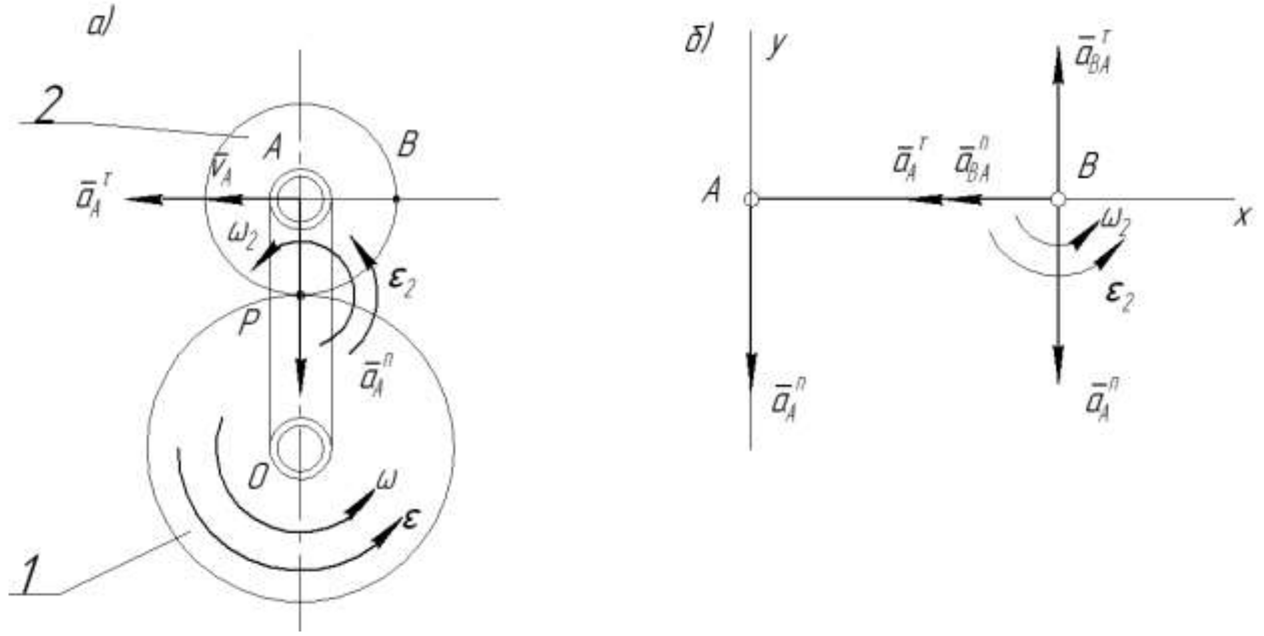


Рис.101

Решение. 1) Определение скорости $V_A = \omega \cdot OA = 1{,}2\, м/с$, $\bar{V}_A \perp \overline{OA}$.

2) Определение ускорения a_A. Выбираем точку А за полюс и зная ω и ε кривошипа, определяем $\bar{a}_A^{\tau}$ и $\bar{a}_A^{n}$

$a_A^{\tau} = OA \cdot \varepsilon = 1{,}8\, м/с^2$; $\bar{a}_A^{n} = OA \cdot \omega^2 = 2{,}4\, м/с^2$.

Так как знаки у V_A и $\bar{a}_A^{\tau}$ одинаковы, то движение точки А ускоренное. Векторы $\bar{a}_A^{\tau}$ и $\bar{a}_A^{n}$ имеют направления, показанные на рисунках.

3) Определяем ω_2. Так как мгновенным центром скоростей является точка Р(точка касания колес) для второго колеса, то

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = 6\, рад/с .$$

Направление дуговой стрелки ω_2 определяется направлением $\overline{V_A}$.

4) Определение ε_2. Зная, что $a^{\tau} = \varepsilon \cdot R$

имеем $\varepsilon_2 = \dfrac{a_A^{\tau}}{r_2} = 9\, рад/с^2$.

Знаки ω_2 и ε_2 одинаковы, то качение колеса 2 является ускоренным.

5) Определяем ускорение точки В.

$$\overline{a_B} = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n} \qquad (1)$$

В нашем случае $AB = r_2 = 0{,}2$ м

$$a^{\tau}_{BA} = AB \cdot \varepsilon_2 = 1{,}8 \, м/с^2; \; a^{n}_{BA} = AB \cdot \omega_2^2 = 7{,}2 \, м/с^2$$

Изображаем векторы, из которых слагается ускорение $\overline{a_B}$ (рис.32,б).

Проводя оси Ax и Ay, находим проецированием уравнение (1) на оси координат:

$$a_{Bx} = -a^{\tau}_{A} - a^{n}_{BA} = -1{,}8 - 7{,}2 = -9 \, м/с^2;$$

$$a_{By} = a^{\tau}_{BA} - a^{n}_{A} = 1{,}8 - 2{,}4 = -0{,}6 \, м/с^2;$$

$$a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} = 9{,}02 \, м/с^2$$

3.7. Мгновенный центр ускорений

При поступательном движении плоской фигуры к нее в каждый момент времени имеется точка К, ускорение которой равно нулю (рис.102)

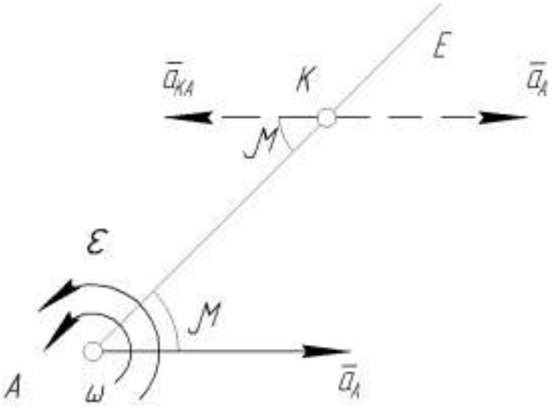


Рис.102

Положение центра К определяется, если известны ускорения $\overline{a_A}$, какой-либо точки А фигуры и величины ω и ε. Для этого надо знать:

1) значение угла μ из формулы $tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$;

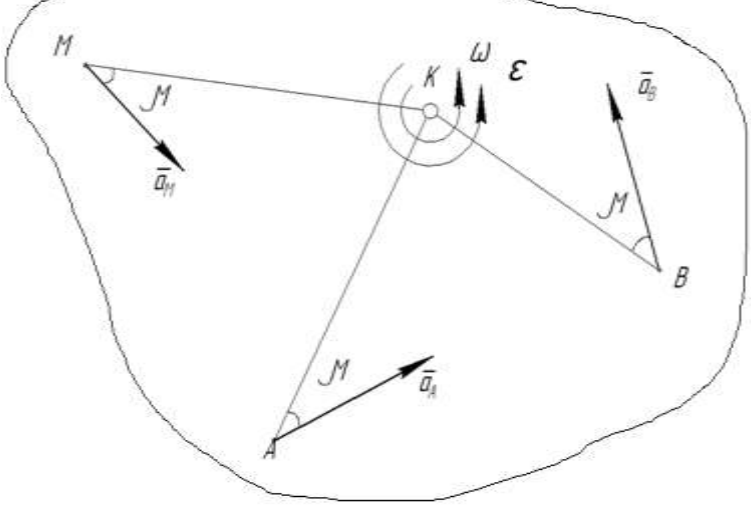
2) проводим прямую АЕ под углом μ от точки А к вектору $\bar{a}_A$ в сторону вращения фигуры, если вращение является ускоренным, и против вращения, если оно является замедленным;

3) откладываем вдоль линии АЕ отрезок АК, равный

$$AK = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \qquad (62)$$

Построенная таким путем точка К и будет мгновенным центром ускорений, т.к.

$$\bar{a}_к = \bar{a}_A + \bar{a}_{KA}$$



Картина распределения ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени показана на рис.103.

Следует иметь в виду, что положения мгновенного центра скоростей Р и мгновенного центра ускорений К в данный момент времени не совпадают.

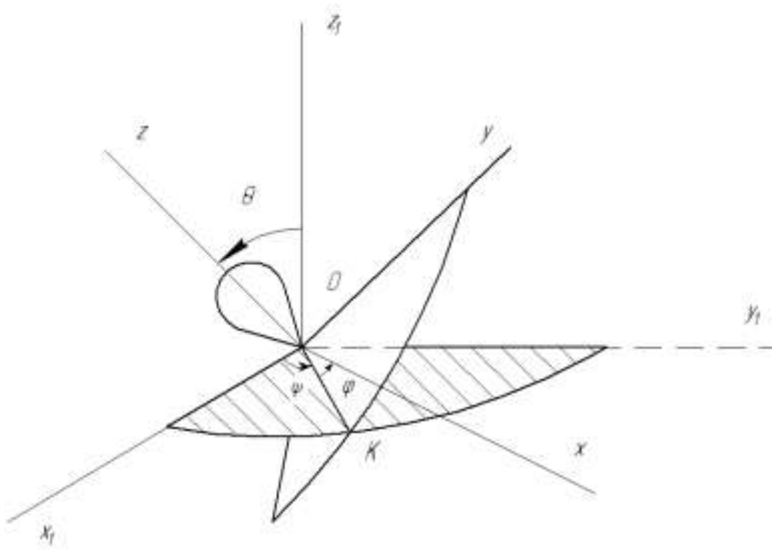
Рис.103

4.Движение твердого тела вокруг неподвижной точки.

4.1 Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Такое движение совершает, например, волчок. Рассмотрим движение по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ твердого тела, у которого точка О остается во все время движения неподвижной.

1) Уравнения движения. Найдем параметры, с помощью которых можно определять положение тела в пространстве.



Для этого жестко свяжем с телом трехгранник Oxyz, по положению которого можно судить о положении тела (рис.104). Линия пересечения плоскостей Oxy и Ox_1y_1 <u>называется линией узлов.</u> Тогда положение тела по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ определяется углами:

$$\varphi = \angle KOx,\ \psi = \angle x_1OK,$$

$$\theta = \angle z_1Oz.$$

Рис.104

Углы φ, ψ и θ - углы Эйлера

φ - угол собственного вращения,

ψ - угол прецессии,

θ - угол нутации.

Положительные направления отсчета углов показаны на рис.104 стрелками.

Чтобы знать движение тела, надо знать его положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, т.е. знать зависимости:

$$\varphi = f_1(t),\ \psi = f_2(t),\ \theta = f_3(t) \qquad (63)$$

Уравнения (63) называются уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

2) Угловая скорость тела

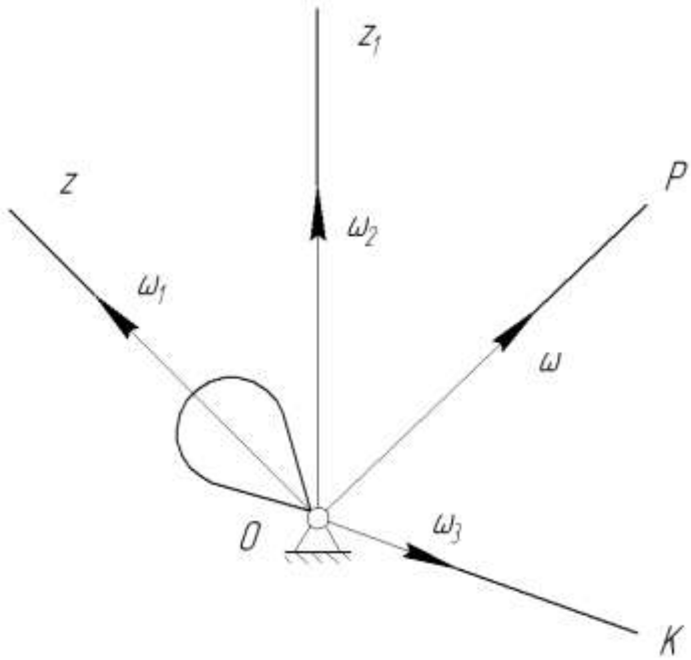


Рис.105

При изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси Oz (собственное вращение) с угловой скоростью

$\omega_1 = \dot{\varphi}$, при изменении угла ψ - вращение вокруг оси

Oz_1 (прецессия) с угловой скоростью

$\omega_2 = \dot{\psi}$

И при изменении угла θ - вращение вокруг линии узлов ОК (нутация) с угловой скоростью

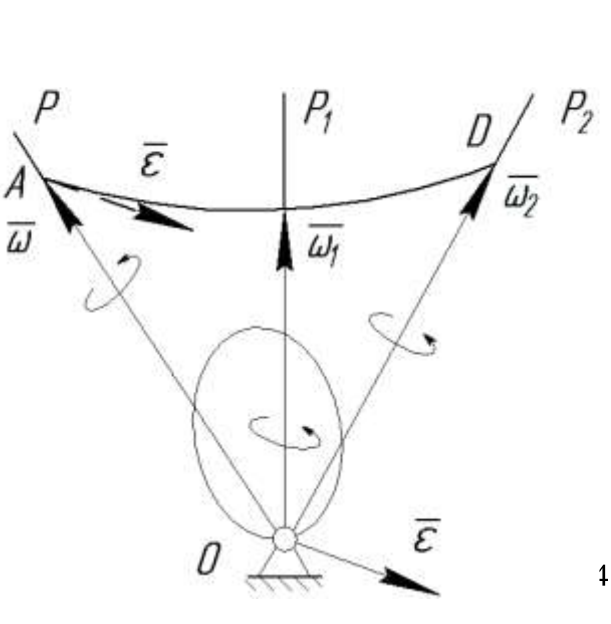
$\omega_3 = \dot{\theta}$

Векторы $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ направлены по осям Oz, Oz_1, ОК (рис.105). При вращении тела изменяются все три угла и тогда

$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3$.

где $\overline{\omega}$ - мгновенная угловая скорость тела (рис.105).

Ось ОР называется мгновенной осью вращения



Элементарным поворотом вокруг оси ОР тело перемещается в соседнее положение, а из этого положения в последующее вокруг новой оси OP_1 и т.д. Таким образом, движение твердого тела вокруг неподвижной точки (рис.106) слагается из ряда последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту неподвижную точку.

Рис.106

3) Угловое ускорение тела

Величина $\bar{\varepsilon} = \dfrac{d\bar{\omega}}{dt}$ (64)

называется угловым ускорением тела или мгновенным угловым ускорением. Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ являются основными кинематическим характеристиками движения тела. Их можно определить аналитически, зная уравнения движения (63).

4.2. Скорости и ускорения точек тела

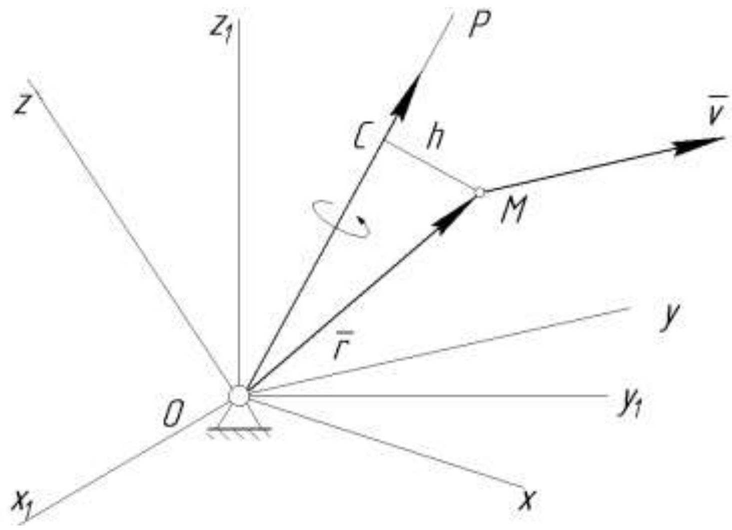


Рис.107

Вокруг мгновенной оси ОР происходит элементарный поворот с угловой скоростью $\bar{\omega}$ (рис.107). Тогда

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (65)$$

Направлен вектор $\bar{V}$ перпендикулярно плоскости МОР.

Численно же

$$V = \omega \cdot h, \qquad (65^*)$$

где $h = MC$ - расстояние точки М от мгновенной оси.

Аналитически скорость $\overline{V}$ определяется

$$\overline{V} = \overline{\omega}\times\overline{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \text{ где}$$

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ V_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ V_z &= \omega_x y - \omega_y z. \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

Формулы (65) и (66) называют формулами Эйлера.

Определим ускорение точки М.

$$\overline{a} = \dot{\overline{V}} = (\dot{\overline{\omega}}\times\overline{r}) + (\overline{\omega}\times\dot{\overline{r}}).$$

где $\dot{\overline{\omega}} = \overline{\varepsilon}$, $\dot{\overline{r}} = \overline{V}$, тогда

$$\overline{a} = (\overline{\varepsilon}\times\overline{r}) + (\overline{\omega} + \overline{V}) \qquad (67)$$

где $\overline{\varepsilon}\times\overline{r} = \overline{a_1}$ - вращательное ускорение,

$\overline{\omega}\times\overline{V} = a_2$ - осестремительное ускорение.

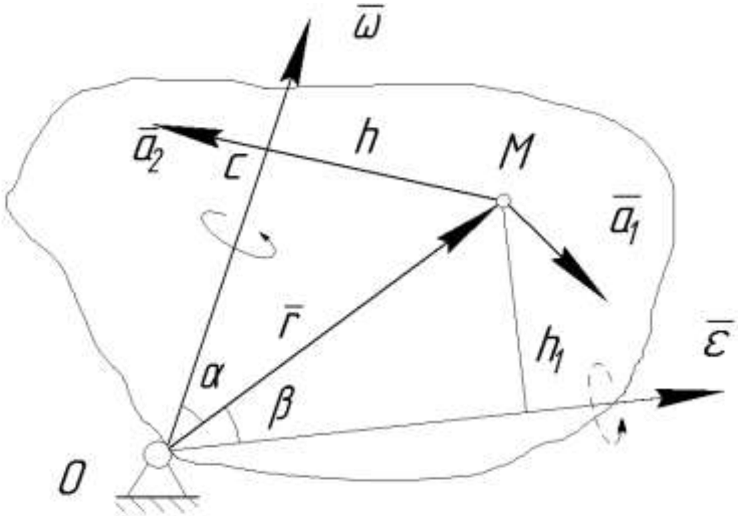


Рис.108

Вектор $\overline{a_1}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку М и вектор $\overline{\varepsilon}$ (рис.108) и по модулю

$$a_1 = \varepsilon\cdot r\cdot\sin\beta = \varepsilon\cdot h_1,$$

h_1 - расстояние от точки М до вектора $\overline{\varepsilon}$. Вектор a_2 направлен вдоль МС и равен

$$a_2 = \omega V\sin 90^0 = \omega^2\cdot h, \text{ где}$$

$V = \omega\cdot h$.

Следует заметить, что в общем случае вектор $\overline{a_1} = \overline{\varepsilon}\times\overline{r}$ не будет вектором касательного ускорения, а вектор $\overline{\omega}\times\overline{V}$ не будет вектором нормального ускорения точки М.

5. Общий случай движения свободного твердого тела

Рассмотрим наиболее общий случай движения твердого тела, когда оно является свободным и может перемещаться как угодно по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ (рис.109) Вид уравнений, определяющих закон такового движения имеют вид:

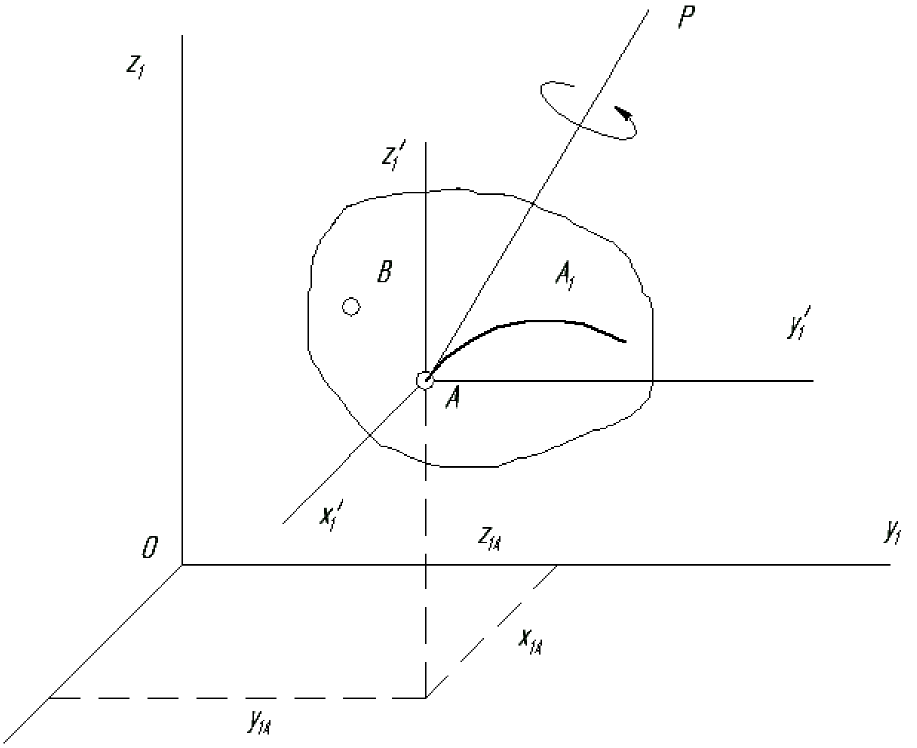


Рис.109

$$x_{1A} = f_1(t),\ y_{1A} = f_2(t),\ z_{1A} = f_3(t) \qquad (68)$$

$$\varphi = f_4(t),\ \psi = f_5(t),\ \theta = f_6(t)$$

где φ, ψ и θ - углы Эйлера, которые определяют положение тела по отношению к осям $Ax_1'y_1'z_1'$. Геометрическая картина движения тела изображена на рис.110.

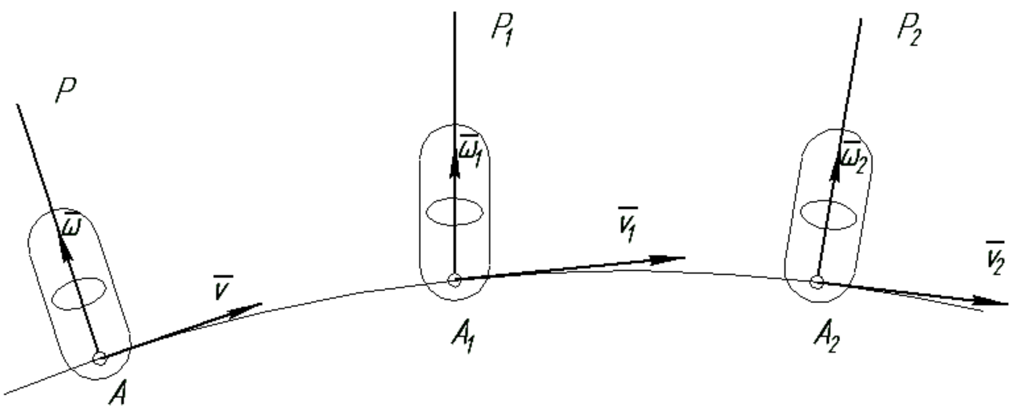


Рис. 110

Первые три уравнения определяют поступательное движение тела вместе с полюсом А при постоянных углах φ, ψ и θ. Три следующих уравнения определяют движение, когда точка А неподвижна, а координаты x_{1A}, y_{1A}, z_{1A} постоянны. В общем случае движение свободного твердого тела можно рассматривать как слагающее из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс А со скоростью $\overline{V}_A$, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью ω вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс А (рис.110). Например, такое движение совершает самолет, проделывающий фигуры высшего пилотажа.

Основными кинематическим характеристиками движения являются скорость $\overline{V}_A$ и ускорение $\overline{a}_A$ полюса, определяющее поступательную часть движения, а также угловая скорость $\overline{\omega}$ и угловое ускорение $\overline{\varepsilon}$ вращения вокруг полюса. Значения этих величин в любой момент времени можно найти по уравнениям (68).

Скорость $\overline{V}_M$ любой точки М тела в этом виде движения определяется как и для плоского движения.

$\overline{V}_M = \overline{V}_A + \overline{V}_{MA}$,

где $\overline{V}_{MA} = \overline{\omega} \times \overline{AM}$ (69)

$\overline{V}_M = \overline{V}_A + (\overline{\omega} \times \overline{AM})$ (70)

Аналогично для ускорения точки М тела

$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}$

где $\overline{r} = \overline{AM}$, $\overline{V} = \overline{V}_{MA} = \overline{\omega} \times \overline{AM}$ (71)

6.Сложное движение точки

7.1. Относительное, переносное и абсолютное движения.

Рассмотрим движение точки М по отношению к подвижной системе отсчета Oxyz(рис.111), которая в свою очередь движется по отношению к неподвижной системе Oxyz. Движение, совершаемое точкой, называется составным или сложным.

Движение точки М по отношению к подвижной системе отсчета (к осям Oxyz) называют относительным движением. Траектория АВ называется относительной траекторией.

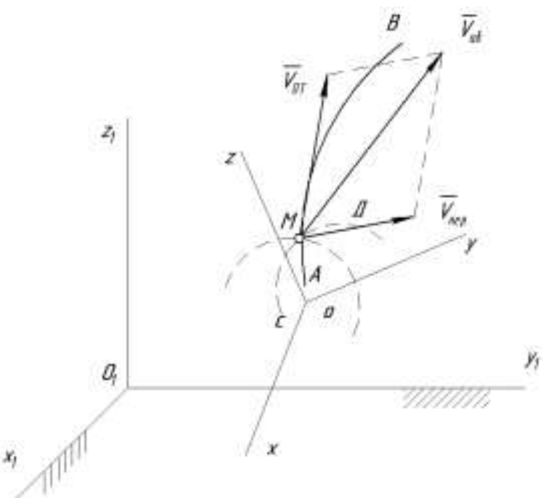


Рис.111

Скорость точки М по отношению к осям Oxyz, называется относительной скоростью (обозначается $\overline{V}_{OT}$), а ускорение – относительным ускорением (обозначается $\overline{a}_{OT}$).

Движение подвижной системы Oxyz по отношению к неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$ является для точки М переносным движением. Соответственно и скорость точки М в этот момент называется переносной скоростью, а ускорение - переносным ускорением. Движение точки М по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется абсолютным или сложным. Траектория СД этого движения называется абсолютной траекторией, скорость – абсолютной скоростью (обозначается $\overline{V}_{аб}$) и ускорение – абсолютным ускорением (обозначается $\overline{a}_{аб}$).

Для решения задач кинематики надо знать зависимости между относительными, переносными и абсолютными скоростями и ускорениями:

$$\overline{V}_{аб} = \overline{V}_{OT} + \overline{V}_{пер} \qquad (72)$$

Направлены векторы $\overline{V}_{аб}$, $\overline{V}_{от}$, $\overline{V}_{пер}$ по касательным к соответствующим траекториям (рис.43).

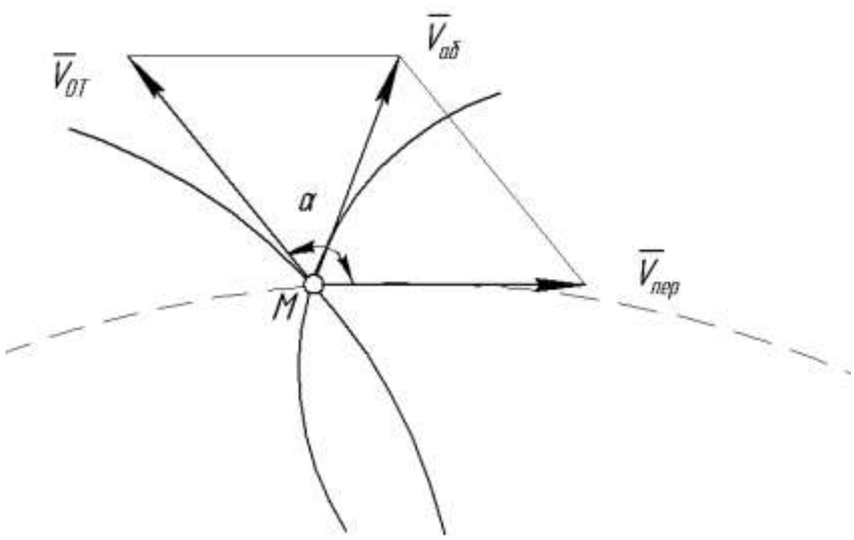


Рис.112

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Построенная на рисунке 112 фигура называется параллелограммом скоростей.

Если угол между векторами $\overline{V}_{OT}$ и $\overline{V}_{пер}$ равен α, то по модулю

$$V_{аб} = \sqrt{V_{OT}^2 + V_{пер}^2 + 2V_{от} \cdot V_{пер} \cdot cos\alpha}$$

Задача. Точка М движется относительно тела Д. Уравнением относительного движения точки М является $OM = S_{OT} = 5\sqrt{2}(t^2 + t)$ см, а переносного движения

$\varphi_{пер} = 0{,}2t^3 + t$ рад. Определить для момента времени $t = 2c$ абсолютную скорость точки М, если $\alpha = 45^0$, катет прямоугольного треугольника равен $a = 50$ см (рис.44).

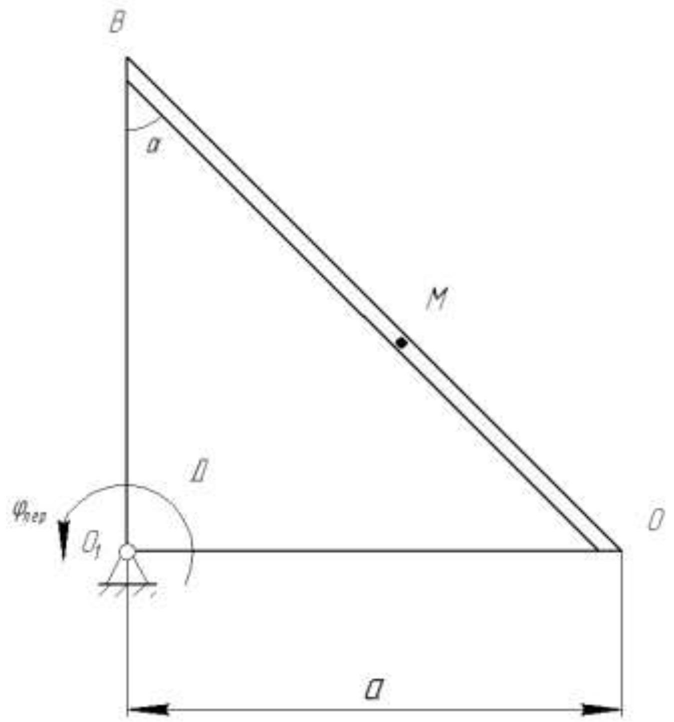
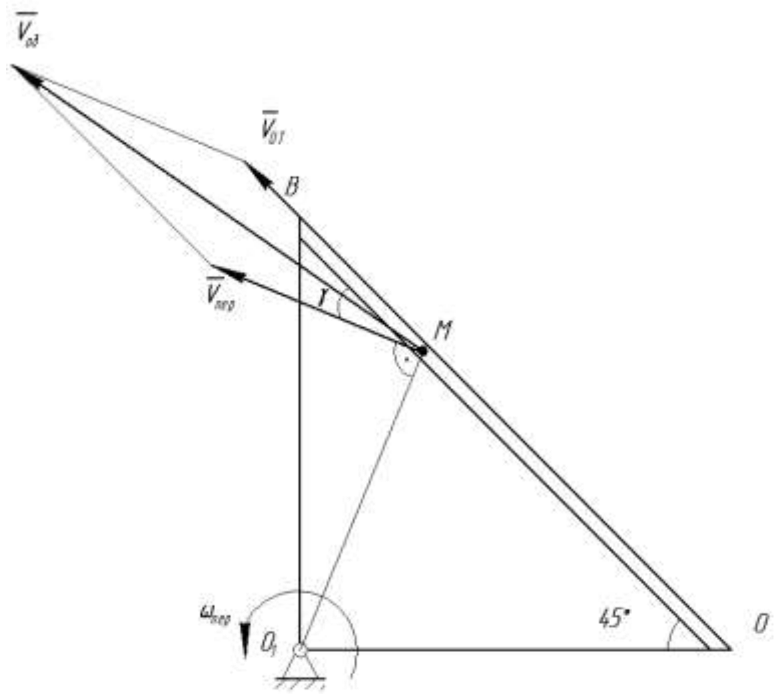


Рис.113

Решение. Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа (рис.44) совпадает с плоскостью треугольника Д.

Найдем положение точки М на чертеже (рис.113) через время $t = 2c$, которое определяется расстоянием $S_{OT} = OM$. При $t = 2c$



$OM = S_{OT} = 5\sqrt{2}(2^2 + 2) = 42{,}2$ см

Абсолютную скорость точки М найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\overline{V_{аб}} = \overline{V}_{OT} + \overline{V}_{пер}.$$

Модуль относительной скорости будет равен

$\overline{V}_{OT} = \dot{S}_{OT} = 5\sqrt{2}(2t + 1)$ при $t = 2c$

$V_{OT} = 35 \,{}^{см}\!/_{c}$.

Положительный знак у V_{OT}

Рис.114

означает, что вектор $\overline{V}_{OT}$ направлен в сторону возрастания $\overline{V}_{OT}$ направлен в сторону возрастания S_{OT} (рис.114) от точки О в сторону возрастания S_{OT} и проводим (строим) вектор $\overline{V}_{OT}$.

Модуль переносной скорости $V_{пер} = O_1M \cdot \omega_{пер}$.

где $\omega_{пер} = \dot{\varphi}_{пер} = 0{,}6t^2 + 1$

При $t = 2c$ $\omega_{пер} = 3{,}4\,\frac{рад}{c}$.

Положительный знак у $\omega_{пер}$ показывает, что поворот треугольника осуществляется в направлении $\varphi_{пер}$. Расстояние O_1M (радиус вращения) определяем по теореме косинусов

$O_1M = \sqrt{O_1O^2 + OM^2 - 2 \cdot O_1O \cdot OM \cdot \cos 45^0} = 36{,}5$ см

Тогда $V_{пер} = O_1M \cdot \omega_{пер} = 36{,}5 \cdot 3{,}4 = 124\,{см}/{c}$

Абсолютная скорость будет

$V_{аб} = \sqrt{V_{OT}^2 + V_{пер}^2 + 2V_{OT} \cdot V_{пер} \cdot \cos\gamma}$

Угол γ можно определить из треугольника O_1BM.

По теореме синусов имеем

$\frac{O_1B}{\sin(90^0 + \gamma)} = \frac{O_1M}{\sin 45^0}$; $\gamma = 16^0$.

Тогда $V_{аб} = \sqrt{35^2 + 124^2 + 2 \cdot 35 \cdot 124 \cdot \cos 16^0} = 158\,{см}/{c}$

$$V_{аб} = 158\,{см}/{c}.$$

Найдем зависимость между относительными , переносными и абсолютными ускорениями точки.

$$\overline{a}_{аб} = \overline{a}_{от} + \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{кор} \qquad (73)$$

При сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова.

где

$$\overline{a}_{кор} = 2(\overline{\omega} \times \overline{V}_{OT}) \qquad (74)$$

В случае поступательного переносного движения $\omega = 0$ и $\overline{a}_{кор} = 0$. Тогда

$$\overline{a}_{аб} = \overline{a}_{OT} + \overline{a}_{пер} \qquad (75)$$

Модуль кориолисова ускорения, если угол между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{V}_{OT}$ обозначить через α, будет равен

$$a_{кор} = 2 \cdot |\omega| \cdot |V_{OT}| \cdot sin\alpha \,. \qquad (76)$$

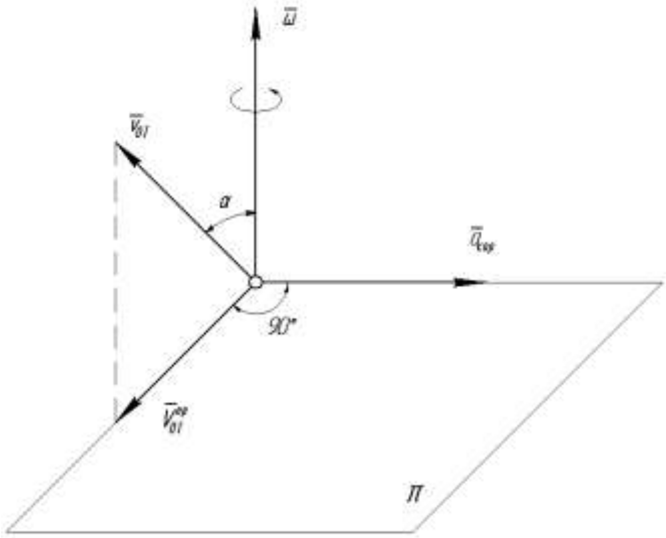


Рис.115

Из рисунка 115 видно, что направление вектора $\bar{a}_{кор}$ можно определить, спроектировать вектор $\bar{V}_{OT}$ на плоскость П, перпендикулярную $\bar{\omega}$, и повернув эту проекцию $\bar{V}^{пр}_{OT}$ на 90^0 в сторону переносного вращения.

Из формулы (76) видно, кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях:

1) огда $\omega = 0$, - переносное движение является поступательным;

2) $V_{OT} = 0$ т.е. относительная скорость в данный момент времени равна нулю;

3) когда $\alpha = 0$, или $\alpha = 180^0$, т.е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения, или вектор $\bar{V}_{OT}$ параллелен этой оси.

Задача. Прямоугольный треугольник ВАС, у которого $\angle BAC = 30^0$, а катет ВС = 15 см, вращается вокруг оси z по закону $\varphi = 4t^2 + 2t$. Вдоль гипотенузы АВ движется от ее середины О движется точка по закону.

$\mu = 5\, sin(\frac{\pi}{3} t)$ (ось μ направлена вдоль ВА). Найти абсолютное ускорение точки М в момент времени $t = 1\, c$.

Решение. 1. Рассмотрим относительное движение точки М вдоль гипотенузы. Определим положение точки М в момент времени $t = 1\, c$.

$$\mu = 5\sin(\frac{\pi}{3} t) = 4{,}33\,\text{см}$$

$$\mu = OM \,.$$

2. Определим V_{OT}. Относительное движение является прямолинейным, значит

$$V_{OT} = \dot{\mu} = \frac{5}{3}\pi\cos(\frac{\pi}{3}t).$$

При $t = 1\,c$, $V_{OT} = 2{,}6\,{}^{см}\!/_{c}$.

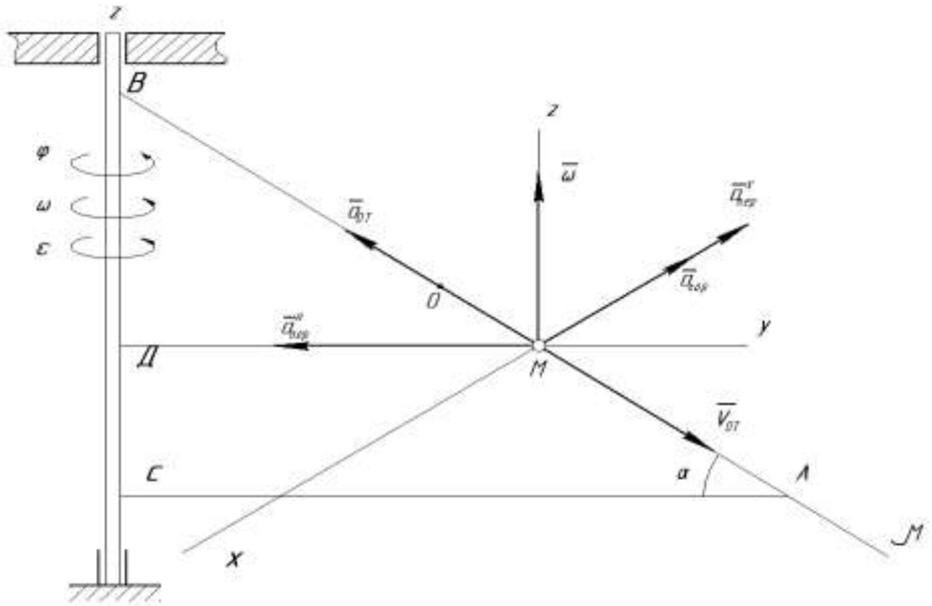


Рис.116

3.Определим ω и ε.

$$\omega = \dot{\varphi} = 8t + 2,$$

при $t = 1\,c$

$$\omega = 10\,\frac{рад}{c}.$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 8\,\frac{рад}{c^2}.$$

Знаки указывают, что вращение треугольника является ускоренным.

4.Определим $\bar{a}_{OT}$.

$$a_{OT} = \dot{V}_{OT} = -\frac{5\pi^2}{9}\sin(\frac{\pi}{3}t)$$

При $t = 1\,c$ $a_{OT} = -4{,}7\,\frac{см}{c^2}$.

Знак указывает, что $\bar{a}_{OT}$ направлен в противоположную сторону $\bar{V}_{OT}$.

5.Определяем $\bar{a}_{пер}$. Вращение треугольника для точки М будет переносным, т.е. точка М движется по окружности радиуса МД=h

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}$$

где $BM = BO + OM = 15 + 4{,}33 = 19{,}33$ см. Тогда

$$h = МД = BM \cdot \cos 30^0 = 16{,}7 \text{ см}$$

$$a^{\tau}_{пер} = \varepsilon \cdot h = 133{,}9\,{}^{см}\!/_{c^2}.$$

$$a^{n}_{пер} = \omega^2 \cdot h = 1670\,{}^{см}\!/_{c^2}.$$

Вектор $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ направлен перпендикулярно плоскости треугольника АВС с учетом знака ε.

6. Определяем $\bar{a}_{кор}$

$$a_{кор} = 2 \cdot |\omega| \cdot |V_{OT}| \cdot \sin 120^0 = 45 \, см/с^2 .$$

Вектор $\overline{a}_{кор}$ совпадает с направлением $\overline{a}^{\tau}_{пер}$.

6.Определяем $\overline{a}_{аб}$.

$$\overline{a}_{аб} = \overline{a}_{OT} + \overline{a}^{\tau}_{пер} + \overline{a}^{n}_{пер} + \overline{a}_{кор}.$$

Для нахождения модуля $a_{аб}$ проводим оси Mxyz(рис.116) и вычисляем проекции всех векторов на эти оси:

$$a_{абx} = -a^{\tau}_{пер} - a_{кор} = -133{,}9 - 45 \approx -179 \, см/с^2 .$$

$$a_{абy} = -a_{OT} \cos 30^0 - a^{n}_{пер} = -1674 \, см/с^2 .$$

Окончательно находим

$$a_{аб} = \sqrt{a^2{}_{абx} + a^2{}_{абx} + a^2{}_{абz}} \approx 1684 \, см/с^2 .$$

7.Сложное движение твердого тела

7.1. Сложение поступательных движений.

Если тело движет я относительно подвижных осей Oxyz (см.рис.42), а эти оси совершают переносное движение по отношению к неподвижным осям $Ox_1y_1z_1$, то результирующее движение тела называют сложным.

Если рассмотреть случай, когда относительное движение тела является поступательным со скоростью $\overline{V_1}$, а переносное со скоростью $\overline{V_2}$ и тоже поступательными, то по теореме о сложении скоростей.

$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2$, то абсолютное движение тела

также будет поступательным со скоростью $\overline{V}$, т.е. как и для случая кинематики точки.

7.2. Сложение вращений около двух параллельных осей.

Рассмотрим случай, когда относительное движение с угловой скоростью $\overline{\omega_1}$ и переносное вращение с угловой скоростью $\overline{\omega_2}$ происходят вокруг параллельных осей. Здесь возможны три частных случая.

1.Вращения направлены в одну сторону.

Очевидно, что $V_A = \omega_2 \cdot AB$.

$V_B = \omega_1 \cdot AB$, где $\overline{V}_A \parallel \overline{V_B}$ и направлен в разные стороны. Точка C является мгновенным центром скоростей ($V_c = 0$), а ось CC мгновенной осью вращения тела (рис.117).

Воспользовавшись известными равенствами, получим

$\omega = \dfrac{V_B}{BC} = \dfrac{V_A}{AC}$, откуда из свойств пропорции получим

$\omega = \dfrac{(V_A + V_B)}{AB}$ и окончательно

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{или} \tag{76}$$

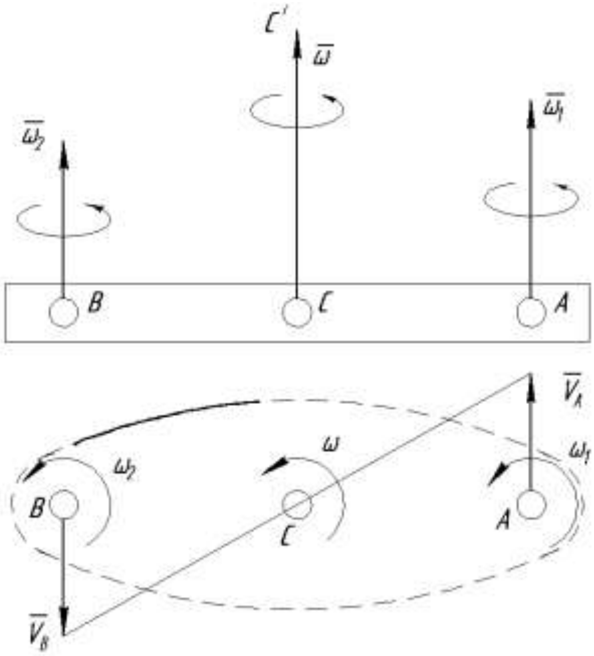


Рис.117

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB} \tag{77}$$

2. Вращения направлены в разные стороны (рис.118)

Изобразим сечение тела и для определенности возьмем $\omega_1 > \omega_2$. Аналогично как в предыдущем случае

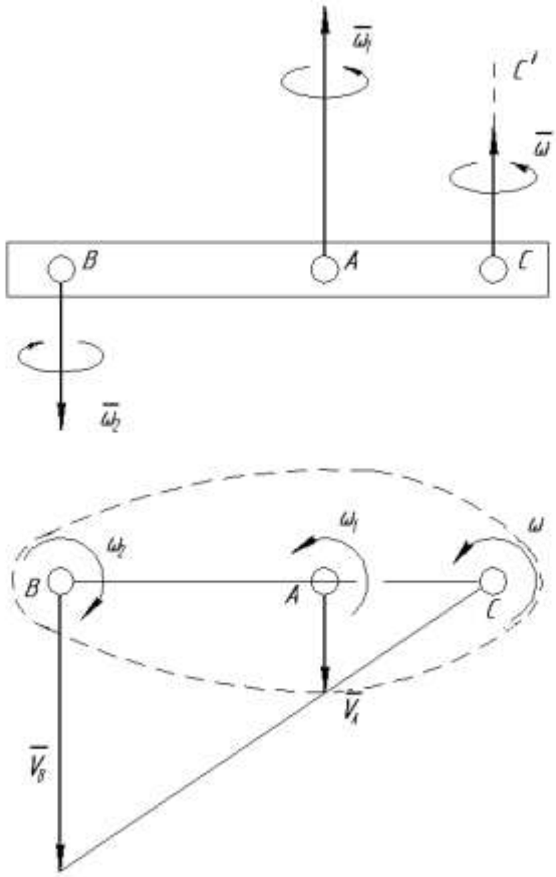


Рис.118

$V_A = \omega_2 \cdot AB$, $V_B = \omega_1 \cdot AB$. $\overline{V}_A // \overline{V_B}$ и направлены в одну сторону. Мгновенная ось вращения проходит через точку С, причем

$$\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} \text{ и } \omega = \frac{(V_B - V_A)}{AB}.$$

Очевидно

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{78}$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB} \tag{79}$$

3. Пара вращений. Рассмотрим случай, когда вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны (рис.120), но по модулю $\omega_1 = \omega_2$. Такая совокупность вращений называется <u>парой вращения</u>. Векторы $\overline{\omega_1}$ и $\overline{\omega_2}$ образуют пару <u>угловых скоростей</u>.

$V_A = \omega_2 \cdot AB$, $V_B = \omega_1 \cdot AB$

т.е. $V_A = V_B$ и $V = \omega_1 \cdot AB$

Следовательно, результирующее движение тела будет поступательным (или мгновенно поступательным).

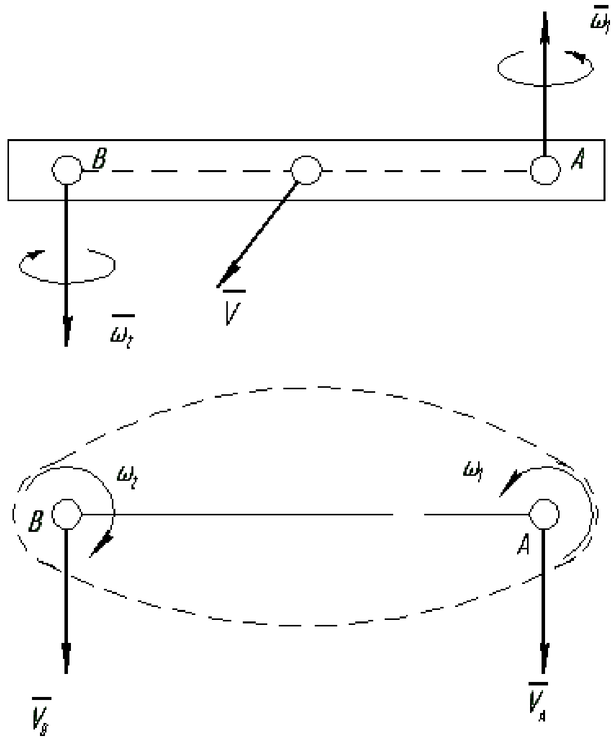


Рис.120

$V = \omega_1 \cdot AB$ и направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$. Пара вращений эквивалента поступательному (или мгновенно поступательному) движению со скоростью $\bar{V}$, равной моменту пары угловых скоростей этих вращений.

Примером такого движения является движение кабины колеса обозрения.

Полученные результаты могут быть использованы для кинематического расчета зубчатых передач, образованных цилиндрическими шестернями.

8.Сложение вращений вокруг пересекающихся осей.

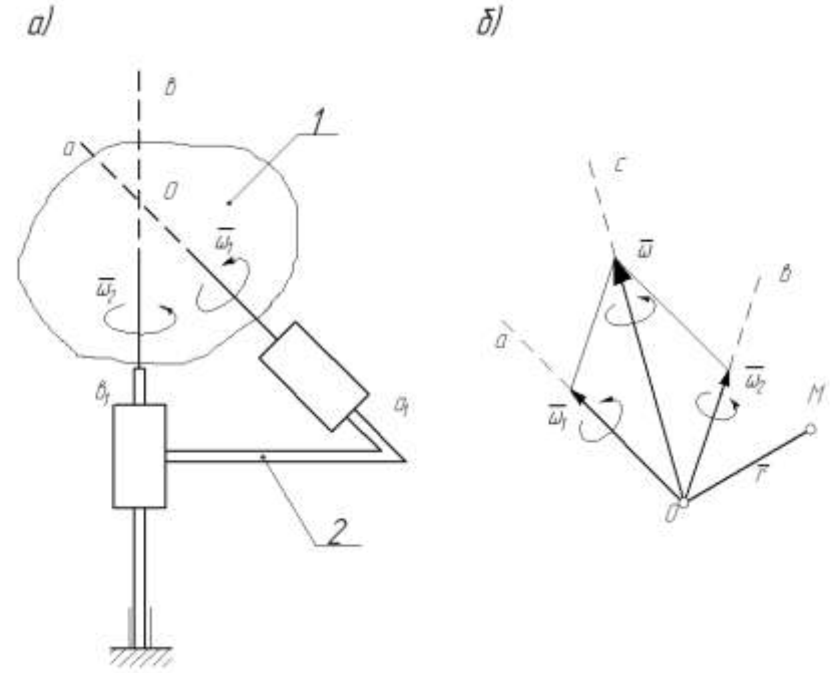


Рис.121

Пусть относительным движением тела является вращение с угловой скоростью $\overline{\omega_1}$ вокруг оси a_1a, укрепленной на кривошипе 2 (рис.121,а), а переносными – вращение с угловой скоростью $\overline{\omega_2}$ вокруг оси bb_1, которая пересекается с осью a_1a в точке О. Схема вращений показана на рис.121, б.

Очевидно, что скорость точки О равна нулю и результирующее движение тела является движением вокруг неподвижной точки О. Тогда тело имеет в данный момент времени угловую скорость $\overline{\omega}$.

$$\overline{\omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} \qquad (80)$$

Следовательно, при сложении вращений вокруг двух осей, пересекающихся в точке О, результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси Ос, Мгновенная ось направлена по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\omega_1}$ и $\overline{\omega_2}$.

Если тело участвует во вращении вокруг нескольких осей, пересекающихся в точке О, то

$$\overline{\omega} = \sum \overline{\omega} k \qquad (81)$$

Абсолютное угловое ускорение $\overline{\varepsilon}$ при таком движении определяется так:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{d\overline{\omega_1}}{dt} + \frac{d\overline{\omega_2}}{dt}$$

где $\overline{\omega_1}$ - относительная, $\overline{\omega_2}$ - переносная угловая скорости. Окончательно

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon_1} + \overline{\varepsilon_2} + \left(\overline{\omega_2} \times \overline{\omega_1}\right) \qquad (82)$$

9. Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение.

Рассмотрим сложное движение твердого тела, которое слагается из поступательного и вращательного движений (рис.122). Относительным движением тела 1 является вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг оси aa_1, переносным – поступательное движение платформы со скоростью $\overline{V}$. Колеса платформы участвуют в аналогичном движении. В зависимости от значений угла α между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{V}$ возможны три случая.

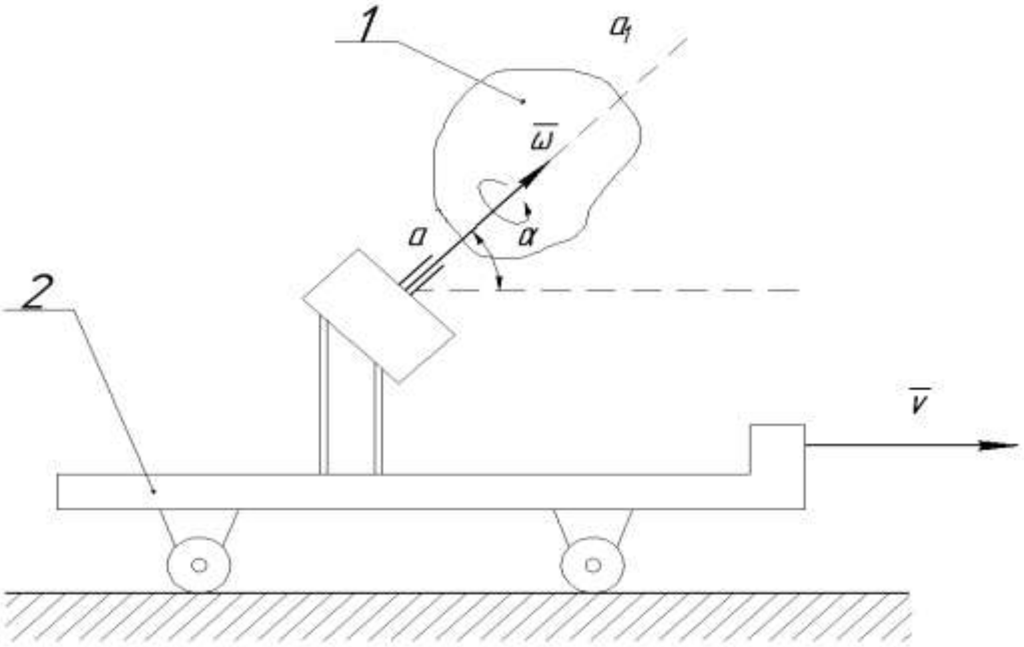


Рис.122

1.Скорость поступательно движения перпендикулярна оси вращения $(\overline{V} \perp \overline{\omega})$.

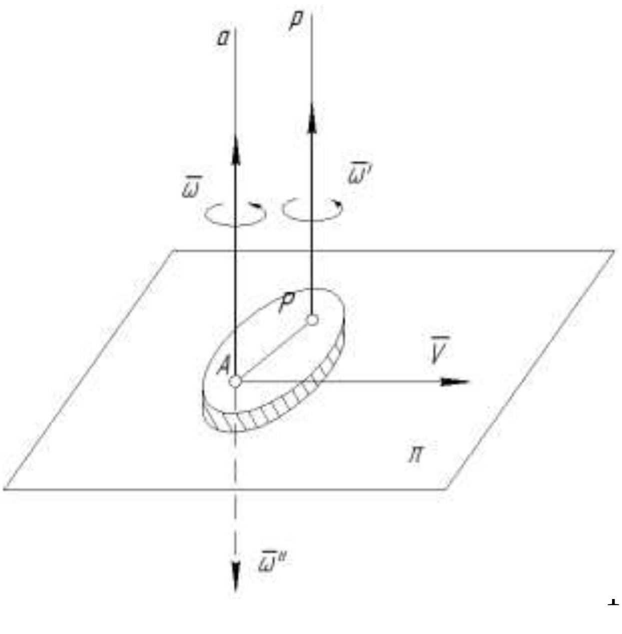
Пусть сложное движение складывается из вращательного вокруг оси Аа с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и поступательного движения со скоростью $\overline{V}$, перпендикулярной $\overline{\omega}$ (рис.123). Очевидно, что это движение является плоскопараллельным.

Если точку А взять за полюс, то поступательная скорость

$$\overline{V}_A = \overline{V}$$

Вектор $\overline{V}$ можно заменить парой угловых скоростей $\overline{\omega}'$, $\overline{\omega}''$. Возьмем $\overline{\omega}'' = -\overline{\omega}$, где расстояние АР найдем из равенства

$$AP = \frac{V}{\omega}.$$



В этом случае движение тела можно рассматривать как мгновенное вращение, вокруг оси РР с угловой скоростью $\overline{\omega}' = \overline{\omega}$. Т.е. поворот тела вокруг осей Аа и Рр происходит с одной и той де угловой скоростью $\overline{\omega}$.

2. Винтовой движение $(\overline{\omega} // \overline{V})$.

Если сложное движение тела слагается из вращательного вокруг оси Аа с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и поступательного со

Рис.123

скоростью $\overline{V}$, направленной параллельно оси Аа (рис.124), то такое движение тела называется винтовым.

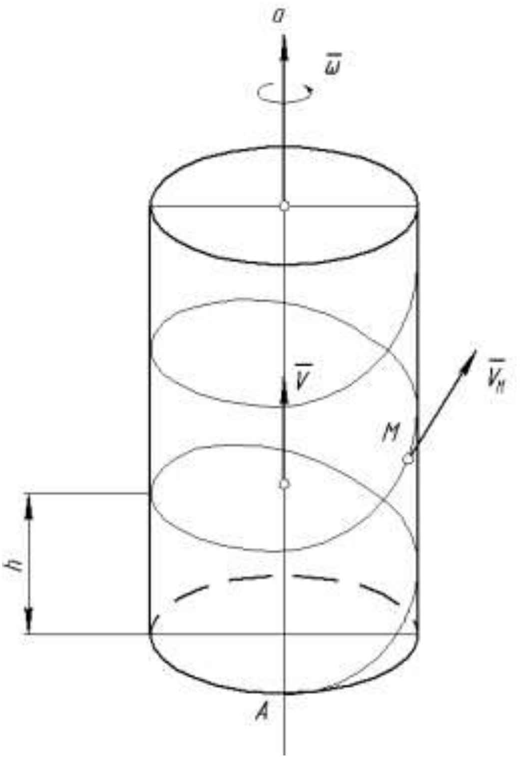


Рис.124

Ось Аа называют осью винта. Если векторы $\overline{V}$ и $\overline{\omega}$ направлен в одну сторону, то винт будет правым; если в разные стороны, - левым.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называется шагом h винта. Если величины V и ω постоянны, то шаг винта, также будет постоянным. Обозначая время одного оборота через Т, имеем $V \cdot T = h$ и $\omega \cdot T = 2\pi$, откуда $h = \dfrac{2\pi V}{\omega}$. Скорость точки М равна $V_M = \sqrt{V^2 + \omega^2 r^2}$, где r – радиус цилиндра. Направлена скорость $\overline{V}_M$ по касательной к винтовой линии.

3.Скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения.

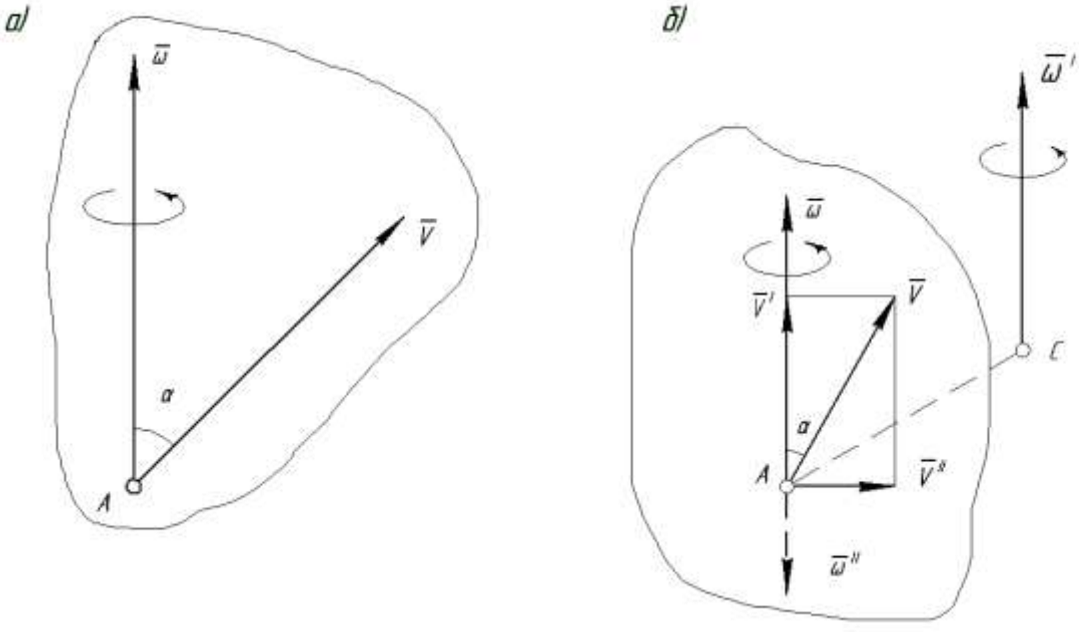


Рис.125

Сложное движение в этом случае (рис.125, а) представляет собой общий случай движения свободного тела. Разложим вектор $\overline{V}$ на составляющие $\overline{V}'$ и $\overline{V}''$:

$V' = V \cdot cos\alpha$, $V'' = V \cdot sin\alpha$, где $\overline{V'} \,//\, \overline{\omega}$, $\overline{V}'' \perp \overline{\omega}$.

Скорость $\overline{V}''$ заменяем парой угловых скоростей $\overline{\omega}' = \overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'' = -\overline{\omega}$, после чего векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}''$ можно отбросить. Расстояние АС можно найти по формуле:

$$AC = \frac{V''}{\omega} = \frac{V \cdot sin\alpha}{\omega}.$$

Тогда у тела остается вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}'$ и поступательное движение со скоростью $\overline{V}'$. Причем $\overline{\omega}' = \overline{\omega}$, а $\overline{V}' \neq V$. При движении свободного тела величины $\overline{V}$, $\overline{\omega}$, α будут вообще все время изменяться, то непрерывно меняется и положение Сс, которую называют мгновенной винтовой осью.

Таким образом, движение свободного твердого тела можно рассматривать как слагающееся из серии мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно изменяющихся винтовых осей.

Часть третья

ДИНАМИКА

1 ДИНАМИКА ТОЧКИ

1.1 Основные понятия и определения

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучают движение материальных объектов под действием приложенных к ним сил.

Материальная точка – точка, обладающая массой.

Абсолютно твердым телом называют совокупность материальных точек, взаимное положение которых не меняется.

Систему координат, жестко связанную с телом отсчёта, *называют системой отсчёта.*

Для отсчёта положения тел применяют прямоугольную трёхмерную Евклидову систему координат.

Для упрощения решения задач в динамике пользуются также естественными, сферическими, полярными и др. системами отсчёта.

Время в теоретической механике считают абсолютным, т.е. одинаково текущим для всех наблюдателей.

Свойство тел сопротивляться попыткам приведения его в движение или изменению направления скорости называется *инертностью.*

Под *массой* понимают меру инертности тела. В классической механике масса тела – величина скалярная и всегда положительная.

Понятие о силе в динамике несколько отличается от понятия силы в статике. В статике, действующие на тело силы были постоянными. В динамике, наряду с постоянными силами, могут быть и переменные действующие силы, у которых модули и направления меняются при движении тел. Эти силы зависят от времени, координат точки, скорости, ускорения и т.п.

Основными единицами системы СИ (Международная система) являются:

1) единица массы – килограмм (масса эталона из платины);

2) единица длины – метр (расстояние, проходимое в вакууме электромагнитной волной за $\frac{1}{299792458}$ долю секунды;

3) единица времени – секунда;

4) единица плоского угла – радиан (угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу)
1 радиан $\approx 57^0 17^/ 45^{//}$.

Остальные единицы механических величин – производные от приведенных, получаемых на основании физических законов. Например, сила измеряется в Ньютонах

$$1H = 1\frac{кг \cdot М}{c^2}$$

$1H$ – это сила, которая в массе 1 кГ сообщает ускорение в 1 м/с^2

1.2 Законы динамики

Первый закон (закон инерции). Если на материальную точку действует уравновешенная система сил, то эта точка находится в покое или совершает равномерное прямолинейное движение.

Такое движение называется движением по инерции.

Второй закон (основной закон динамики): Ускорение, которое получает материальная точка под действием силы, прямо пропорционально силе и направлено по линии её действия.

Этот закон выражается векторным равенством

$$m\overline{a} = \overline{F} \qquad (1)$$

Если на тело одновременно действует несколько сил, то основной закон динамики принимает вид

$$m\overline{a} = \sum \overline{F_k} \qquad (2)$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). Два тела (точки) взаимодействуют друг с другом с силами, равными по модулю и противоположными по направлению вдоль прямой, соединяющей эти точки.

1.3. Основные виды сил

1) *Сила тяжести*. Это постоянная сила $\overline{P}$, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Модуль силы тяжести равен весу тела.

$$P = mg \text{ или } m = \frac{P}{g} \tag{3}$$

где g – ускорение свободного падения.

2*) Сила тяготения*. Это сила, с которой два материальных тела притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения, открытому Ньютоном.

$$F = \frac{fm_1 m_2}{r^2} \tag{4}$$

где f - гравитационная постоянная (в СИ $f = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$)

r - расстояние между телами

m_1 и m_2 - массы тел

3) *Сила трения скольжения.*

$$F = f \cdot N \tag{5}$$

где f - коэффициент трения;

N - нормальная реакция

4) *Сила упругости.* Эта сила зависит от расстояния, и её значение определяется согласно закона Гука. В частности, для силы упругости пружины

$$F = c \cdot \lambda \tag{6}$$

где λ - удлинение (или сжатие) пружины;

c - коэффициент жёсткости пружины (в СИ измеряется в Н/м)

5) *Сила вязкого трения.* Эта сила зависит от скорости

$$R = \mu \cdot \upsilon \tag{7}$$

где υ -скорость тела;

μ - коэффициент сопротивления

6) *Сила аэродинамического (гидродинамического) сопротивления.* Эта сила также зависит от скорости. Её величина определяется

$$R = 0.5 \cdot C_x \cdot \rho \cdot S \cdot \upsilon^2 \tag{8}$$

где ρ - плотность среды;

S - площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения (площадь);

C_x - безразмерный коэффициент сопротивления, определяемый экспериментально и зависящий от формы тела.

1.4 Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Для решения динамики точки надо знать уравнения, связывающие координаты *x, y, z* этой точки и действующие на силы. Проектируя равенства $m\overline{a} = \sum \overline{F_k}$, на оси координат, получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \; m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \; m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz} \tag{9}$$

или

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \; m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \; m\ddot{z} = \sum F_{kz} \tag{10}$$

Это и есть дифференциальные уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах.

А уравнения в проекциях на оси естественного трёхгранника

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=\sum F_{k\tau}\,,\;\; m\frac{\upsilon^2}{\rho}=\sum F_{kn}\,,\;\; 0=\sum F_{kв} \qquad (11)$$

1.5 Первая и вторая задачи динамики

Первая (прямая) задача динамики состоит в том, что зная уравнение движения точки и её массу, можно определить силу $\bar{F}$, под действием которой осуществляется движение.

Задача 1. Уравнения движения точки *M* массой 2 кг имеет вид:

1. $x=5\cos\frac{\pi}{3}t$ м

2. $y=5\sin\frac{\pi}{3}t$ м.

Определить силу *F*, под действием которой движется точка.

Решение. Определяем уравнение траектории точки, исключив время *t* из уравнений движения.

Перепишем наши уравнения, придав им вид:

$$\cos\frac{\pi}{3}t=\frac{x}{5}\,;\;\; \sin\frac{\pi}{3}t=\frac{y}{5}$$

Возводя в квадрат и складывая, получим

$$\cos^2\frac{\pi}{3}t=\frac{x^2}{25}\,;\;\; \sin^2\frac{\pi}{3}t=\frac{y^2}{25} \text{ или}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{3}t+\sin^2\frac{\pi}{3}t=\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{5^2}\,; \text{ или}$$

$$x^2+y^2=5^2$$

Траекторией движения точки служит окружность радиуса 5 м с центром в начале координат (рис. 126).

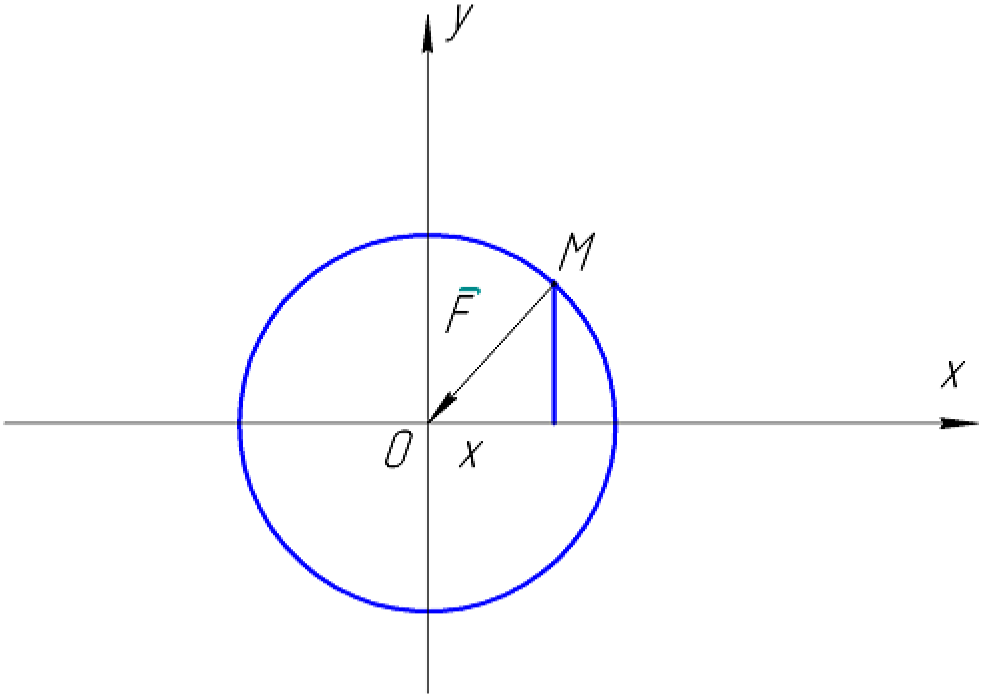


Рис. 126

Дважды дифференцируя уравнения движения, получим проекции ускорения точки на оси координат:

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{5}{9}\pi^2 \cos\frac{\pi}{3}t \text{ м/с}^2$$

$$a_y = \ddot{y} = -\frac{5}{9}\pi^2 \sin\frac{\pi}{3}t \text{ м/с}^2$$

Проекции силы на оси координат будут

$$F_x = ma_x = -11\cos\frac{\pi}{3}t,$$

$$F_y = ma_y = -11\sin\frac{\pi}{3}t$$

Модуль силы равен: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 121$ Н

Вторая (обратная) задача механики состоит в том, что по заданным силам, действующим на точку, определяется закон её движения и решение сводится к следующим операциям:

1. Составление дифференциального уравнения движения.

2. Интегрирование дифференциального уравнения движения.

3. Определение постоянных интегрирования.

4. Нахождение искомых в задаче величин и исследование изученных результатов.

Задача 1. Тело двигается из точки *A* по участку *AB* (длиной l=8 м) наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 60^0$ с горизонтом. Его начальная скорость $\upsilon_A = 0$. Через $\tau = 1{,}5c$ тело приходит в точки *B*. Определить коэффициент трения скольжения *f* по плоскости.

Решение. Рассмотрим движение тела на участке *AB*, принимая его за материальную точку (рис.127).

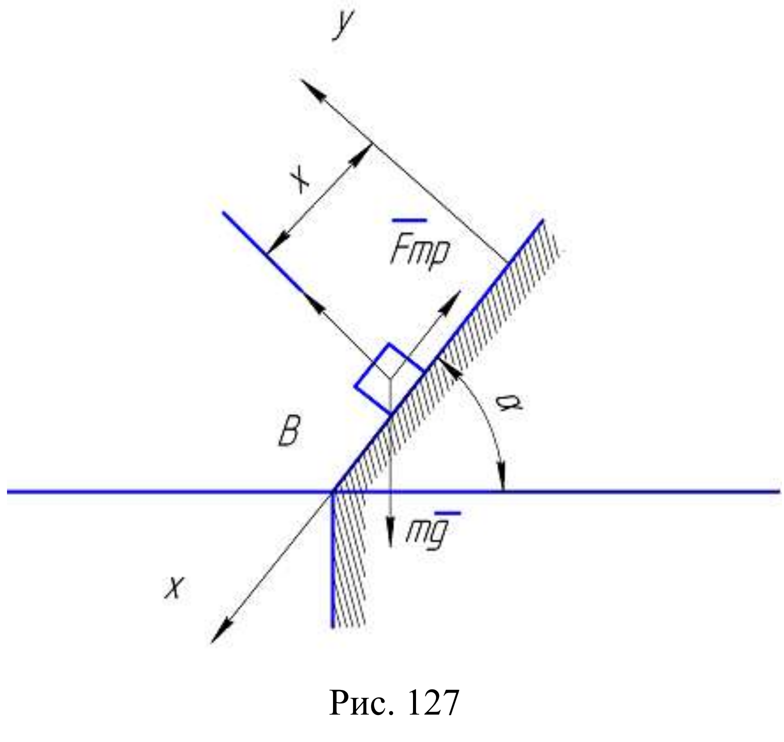


Рис. 127

Покажем действующие на точку силы:

$m\overline{g}$ - вес тела;

$\overline{N}$ - нормальная реакция;

$\overline{F}_{\text{тр}}$ - сила трения скольжения.

Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке *AB*:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx};$$

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}$$

где сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N.$$

Составляя уравнение движения тела вдоль оси A_y получим:

$$N = mg\cos\alpha$$

Таким образом, имеем:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - f \cdot mg\cos\alpha$$

или

$$\ddot{x} = g\sin\alpha - f \cdot g\cos\alpha$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем:

$$\dot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot t + c_1;$$

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

Определяем постоянные интегрирования c_1 и c_2 при t=0, x_0=0, $\dot{x}$=0, имеем

$$c_1=0,\ c_2=0$$

Тогда $\dot{x} = g(\sin\alpha - f \cdot g\cos\alpha) \cdot t$

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot \frac{t^2}{2}$$

Для момента τ, когда тело приходит в точку *B*,

$$\dot{x} = \upsilon_B;\ x = l,\ \text{т.е.}$$

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot\frac{\tau^2}{2}$$

Откуда f=0,28

1.6 Первая космическая скорость

Круговой или *первой космической скоростью* называется скорость, которую нужно сообщить брошенному телу, чтобы оно не упало обратно на землю.

Определим, какую начальную скорость надо сообщить телу, чтобы она двигалось внутри Земли по круговой орбите радиуса R (рис.128).

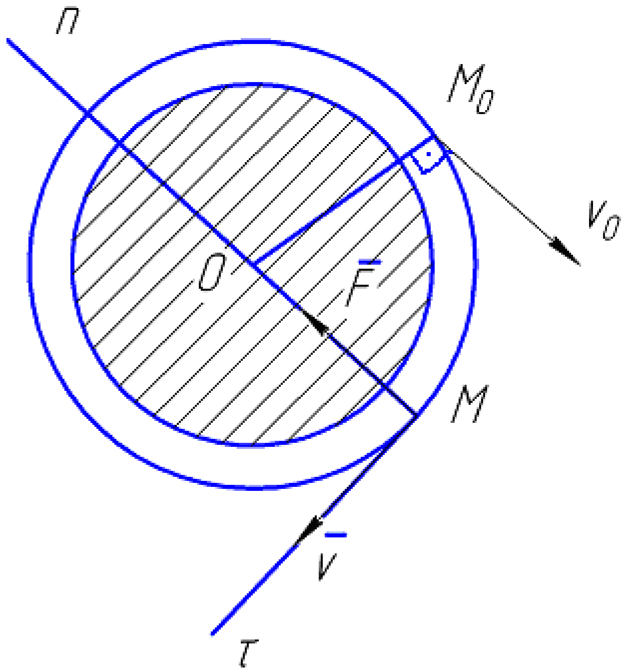


Рис.128

Для определения начальной скорости υ_0 воспользуемся формулами

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = \sum F_{k\tau}\,, \qquad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = \sum F_{kn}$$

Рассмотрим положение тела в точке *M*. На неё действует сила тяготения $\bar{F}$ численно равная:

$$F = mg,$$

где m - масса точки,

g - ускорение силы тяготения в точке *M*.

Проводим оси M_τ и M_n. Так как $F_\tau = 0$, а $F_n = F$, то имеем:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 0, \quad \frac{m\upsilon_0^2}{R} = F \text{ или } \frac{m\upsilon_0^2}{R} = mg \text{ или } \frac{\upsilon_0^2}{R} = g$$

Очевидно, что $\upsilon = const$ и отсюда следует, что $\upsilon = \upsilon_0$. Принимая *R*=6378 км, g=9,82 м/с^2 из второго уравнения получаем:

$$\upsilon_0 = \sqrt{gR} = 7914 \text{ м/с} \approx 7{,}9 \text{ км/с}$$

2 ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

При решении задач динамики механических систем вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более эффективным пользоваться общими теоремами, полученными из основного закона динамики.

2.1 Теорема об изменении количества движения точки

Количество движения – основная характеристика динамики движения точки.

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $\bar{q} = m\bar{\upsilon}$, равная произведению массы точки на её скорость.

Направлен вектор количества движения точки $\bar{q}$ по вектору скорости (рис.129). В системе СИ размерность количества движения точки ($кг \cdot м/с$). Количество движения является мерой механического движения точки (как и кинетическая энергия точки).

Для характеристики действия силы на тело за некоторый промежуток времени, вводится понятие *импульса силы.*

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt \qquad (12)$$

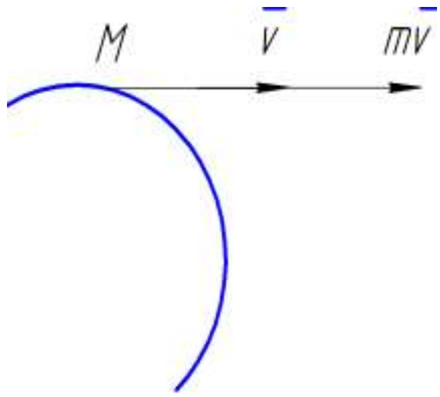


Рис. 129

Импульс силы $\bar{S}$ за некоторый промежуток времени t равен определенному интегралу от элементарного импульса.

Если сила $\bar{F}$ постоянна и по модулю, и по направлению ($\bar{F} = const$), то $\bar{S} = \bar{F} \cdot t$.

В общем случае модуль импульса может быть вычислен по его проекциям на координатные оси:

$$S_x = \int_0^t F_x dt, \quad S_y = \int_0^t F_y dt, \quad S_z = \int_0^t F_z dt \qquad (13)$$

Если масса точки постоянна, а её ускорение $\bar{a} = \dfrac{d\bar{\upsilon}}{dt}$, то основной закон динамики можно представить в виде:

$$\frac{d(m\bar{\upsilon})}{dt} = \sum \bar{F}_k \tag{14}$$

Это и есть теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме. Не трудно получить из уравнения (14):

$$m\bar{\upsilon}_1 - m\bar{\upsilon}_0 = \sum \int_0^t \bar{F}_k dt \text{ или}$$

$$m\bar{\upsilon}_1 - m\bar{\upsilon}_0 = \sum \bar{S}_k \tag{15}$$

Уравнение (15) – теорема об изменении количества движения точки в конечном виде.

Эта же теорема в проекциях на оси координат имеет вид:

$$m\upsilon_{1x} - m\upsilon_{0x} = \sum S_{kx} ,$$

$$m\upsilon_{1y} - m\upsilon y = \sum S_{ky} , \tag{16}$$

$$m\upsilon_{1z} - m\upsilon_{0z} = \sum S_{kz} ,$$

Решение задач. Уравнения (15) и (16) позволяют определять импульс действующих сил, если известно, как меняется её скорость (первая задача динамики). Зная импульсы действующих сил, можно определить, как меняются скорости при движении точки (вторая задача динамики), если силы постоянны или только зависят от времени.

Задача 4.1. Материальная точка массы m спускается вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту; f=0,3 – коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость. Скорость груза в точке A была $\upsilon_A = 1$ м/с, а в точке B стала 2 м/с. Определить время движения точки от A до B (рис.130).

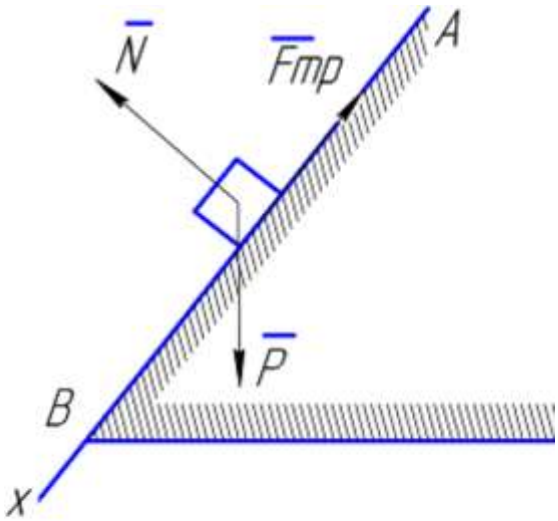


Рис.130

Решение. Изобразим силы, действующие на точку:

$\overline{P} = m\overline{g}$ - сила тяжести;

$\overline{N}$ - сила реакции плоскости,

$\overline{F}_{\text{тр}}$ - сила трения скольжения.

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N = fmg\cos\alpha$$

Направим ось x вдоль наклонной плоскости. В проекции на ось x имеем:

$$m\upsilon_{2x} - m\upsilon_{1x} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{S}_{\mathrm{kx}} \,,$$

Так как все силы, приложенные к грузу постоянны, то:

$$m \cdot 2 - m \cdot 1 = mg(\sin 45^0 - f \cdot \cos 45^0)\Delta t$$

Откуда $\Delta t = 0{,}2$ с

Задача 4.2. Под действие силы $F = 2tH$ твёрдое тело начинает двигаться из состояния покоя по шероховатой поверхности (рис.131). Какая скорость будет через t=1,5 с после начала движения, если коэффициент трения скольжения f=0,2, а масса тела m=0,1 кг.

Решение. Изобразим силы, действующие на тело:

$\overline{P} = m\overline{g}$ - сила тяжести,

$\overline{F}$ - движущая сила, равная по модулю $F=2t$.

$\overline{\text{N}}$ - сила реакции опоры,

$\overline{F}_{тр}$ - сила трения скольжения

$$F_{тр} = f \cdot N = f \cdot P$$

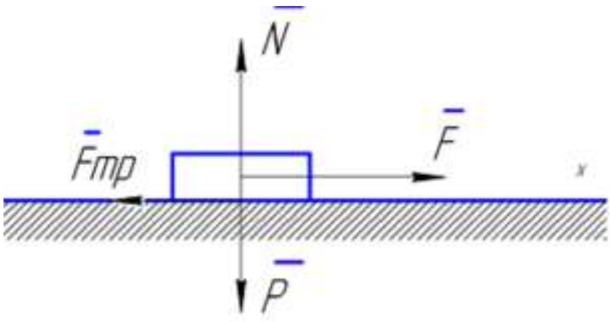


Рис. 131

Выбираем направление оси x и запишем теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось x:

$$m\upsilon_{2x} - m\upsilon_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx} \,,$$

где $\upsilon_{1x} = 0$ по условию задачи, $\upsilon_{2x} = \upsilon_x$ - проекция скорости на ось x.

Тогда имеем $m\upsilon_x = \int_0^t Fdt - F_{тр} \cdot t = \int_0^{1.5} 2tdt - fmgt = \frac{2t^2}{2} - 0.2 \cdot 0.1 \cdot 9.8 \cdot t$

Откуда:

$$\upsilon_x = t \cdot (\frac{t}{m} - fg)$$

Подставляя t=1,5 с, получим $\upsilon_x = 19{,}56$ м/с

2.2 Теорема об изменении момента количества движения точки

Моментом количества движения точки относительно некоторого центра O называется векторная величина $\overline{m}_0(m\overline{\upsilon})$, равная

$$\overline{m}_0(m\overline{\upsilon}) = \overline{r} \times m\overline{\upsilon} \tag{17}$$

где $\overline{r}$ - радиус- вектор движущейся точки.

Вектор $\overline{m}_0(m\overline{\upsilon})$ перпендикулярен плоскости, проходящей через вектора $\overline{r}$ и $m\overline{\upsilon}$ (рис.132).

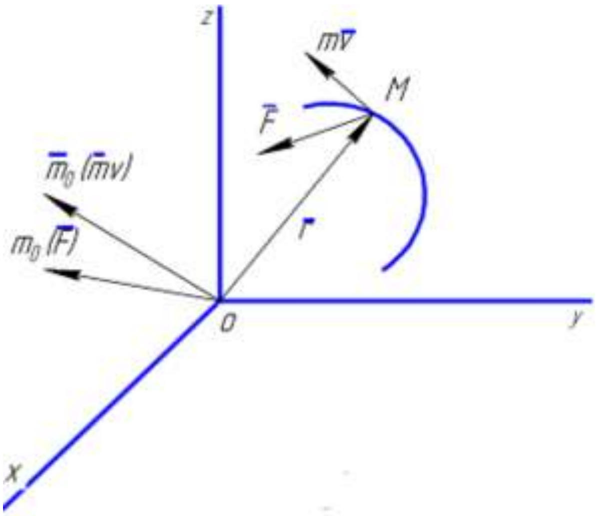


Рис. 132

Момент количества движения точки относительно какой-нибудь оси Oz будет:

$$m_z(m\overline{\upsilon}) = |m_0(m\overline{\upsilon})| \cdot \cos\gamma \tag{18}$$

где γ - угол между вектором $\overline{m}_0(m\overline{\upsilon})$ и осью Oz.

Производная по времени от момента количества движения точки, относительно какого-нибудь центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{\upsilon}) = \bar{r} \times \bar{F} \text{ или } \frac{d}{dt}\left[\bar{m}_0(m\bar{\upsilon})\right] = \bar{m}_0(\bar{F}) \tag{19}$$

Теорема моментов относительно оси Oz будет:

$$\frac{d}{dt}\left[m_z(m\bar{\upsilon})\right] = m_z(\bar{F}) \tag{20}$$

2.3 Работа силы. Мощность

Для характеристики действия силы на тело вводится понятие работы силы.

Элементарной работой силы $\bar{F}$, действующей на точку M (рис.133) называется скалярная величина

$$dA = F_\tau dS \tag{21}$$

Так как $F_\tau = F \cdot \cos\alpha$, то:

$$dA = FdS\cos\alpha \tag{22}$$

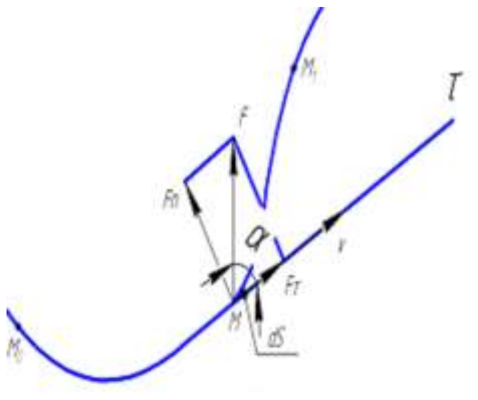


Рис. 133

Если угол α острый, то работа положительна: $dA = F \cdot dS \cos\alpha$. Если угол α тупой, то работа отрицательна: $dA = -F \cdot d \cdot S$. Если α =90^0, то элементарная работа силы равна нулю.

Учитывая, что $dS = |d\bar{r}|$, то:

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} \cos\alpha \qquad (23)$$

или

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z dz \qquad (24)$$

где $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ - координаты точки приложения силы.

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 вычисляется:

$$A(M_0 M_1) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau dS \qquad (25)$$

или

$$A(M_0 M_1) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (26)$$

Если $F_\tau = const$ и $M_0 M_1 = S_1$, то

$$A(M_0 M_1) = F_\tau \cdot S_1 \qquad (27)$$

В системе СИ единицей измерения работы является – 1 джоуль (*1 дж=1Н·м=1 кг·м²/с²*)

Если известен график зависимости F_τ от S (рис.134), то работы силы можно вычислить графически

$$A(M_0 M_1) = \int_{S_0}^{S_1} F_\tau dS = \sigma$$

где σ - величина заштрихованной на рис.9 площади.

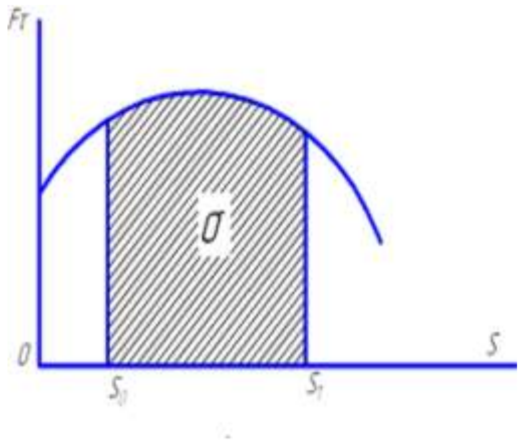


Рис.134

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.

$$N = \frac{dA}{dt} = F_\tau \cdot \frac{dS}{dt} = F_\tau \cdot \upsilon \qquad (28)$$

Единицей измерения мощности в СИ является *ватт* (1 Вт=1 дж/с)

1 л.с. =736 Вт=75кГм/с

2.4 Примеры вычисления работы

1. Работа силы тяжести.

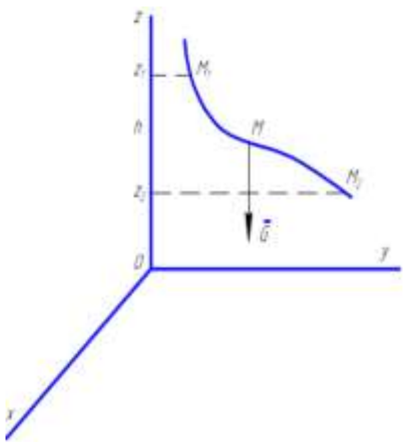


Рис. 135

Пусть точка M перемещается пространственной кривой (рис.135) из положения M_1 в положение M_2 под действием силы тяжести $\overline{G}$. Направим координатные оси так, чтобы сила тяжести $\overline{G}$ была параллельна оси Z. Тогда $G_x = 0$, $G_y = 0_1$, $G_z = -G$. Подставив эти значения в формулу (26), получим:

$$A(M_1M_2) = \int_{z_1}^{z_2} (-G)dz = G(z_1 - z_2)$$

Если точка M_1 выше M_2, то $z_1 - z_2 = h$. Окончательно имеем:

$$A(M_1M_2) = \pm Gh \tag{29}$$

Работа положительна, если начальная точка выше конечной и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

2. Работа силы упругости.

Рассмотрим груз M прикрепленный к концу пружины и лежащий на горизонтальной плоскости (рис.136). Отметим, что $AO = l$ - длина нерастянутой пружины. Если растянуть пружину до величины l, то она получит удлинение $\lambda = l - l_0$ и на груз M будет действовать сила упругости $\overline{F}_у$, направленная к точке o.

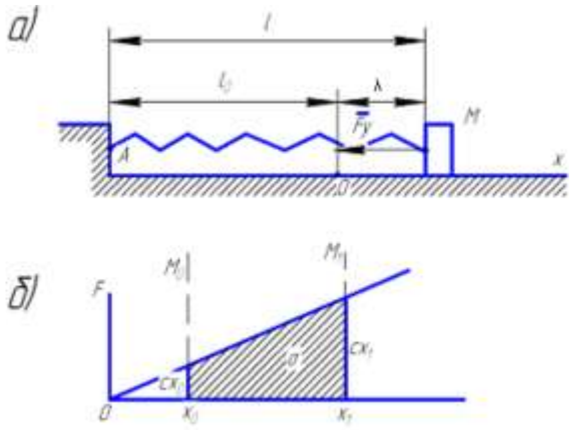


Рис. 136

При $\lambda = x$ по формуле (6) получим:

$F_y = c\lambda = c|x|$ и $F_{yx} = -cx$ и по формуле (26):

$$A(M_0M_1) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2) \qquad (30)$$

Это работа, совершаемая силой упругости при перемещении груза из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$. Где x_0 - начальное удлинение пружины λ_0; x_1 - конечное удлинение пружины λ_1.

Работа будет положительной, когда $\lambda_0 > \lambda_1$ и отрицательной, когда $\lambda_0 < \lambda_1$, т.е. когда конец пружины удлиняется от положения равновесия.

3. Работа силы трения.

Пусть движется точка (рис.137) по шероховатой поверхности на неё действуют силы:

$\overline{G}$ - сила тяжести;

$\overline{N}$ - нормальная реакции поверхности;

$\overline{F}_{\text{тр}}$ - сила трения, направленная по касательной к траектории движения в сторону, обратную скорости.

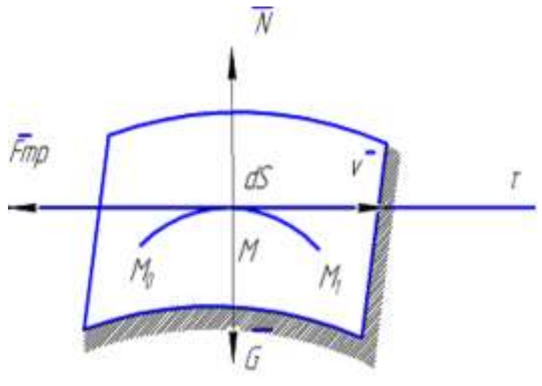


Рис. 137

Следовательно, $F_{\text{тр}\tau} = -F_{\text{тр}} = -fN$ и по формуле (25)

$$A(M_0M_1) = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\text{тр}} dS = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} fNdS$$

Работа силы тяжести и работа нормальной реакции равны нулю, так как они перпендикулярны к траектории:

$$A(M_0M_1) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} -fGS\,,$$

где: S - пройденный путь по криволинейной траектории.

4. Работа силы тяготения.

Если Землю рассматривать как однородный шар, то на точку *M* массой *m*, находящуюся на расстоянии *r* от его центра, будет действовать сила тяготения $\bar{F}$ и направленная к центру *O* (рис. 138).

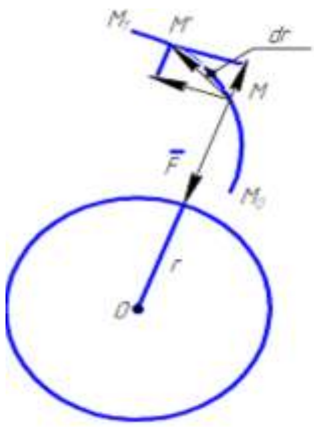


Рис. 138

$$F = \frac{km}{r^2}$$

где: коэффициент $k = gR^2$ из условий, что $r = R$ - радиус Земли, а сила притяжения равна mg, т.е. $mg = \frac{km}{R^2}$.

Подсчитав элементарную работу, равную

$$dA = -Fdr = -km\frac{dr}{r^2} = -mgR^2\frac{dr}{r^2}$$

Предположим, что точка M перемещается из положения M_0 в положение M_1. Тогда

$$A(M_0M_1) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA = -mgR^2\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^2} = -mgR^2\int_{r_0}^{r_1} d(\frac{1}{r})$$

или окончательно:

$$A(M_0M_1) = mgR^2(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0})$$

Работа будет положительной, если $r_0 > r_1$, т.е. когда конечное положение будет ближе к земной поверхности.

2.5 Теорема об изменении кинетической энергии точки

Кинетическая энергия является основной динамической характеристикой движения точки.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $\frac{m\upsilon^2}{2}$, равная половине произведения массы точки на квадрат её скорости.

Единицей измерения в системе СИ – 1 Дж.

Найдем зависимость между работой и кинетической энергией. Для этого используем основной закон динамик: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$.

Спроектируем это уравнение на ось M_τ

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}$$

где $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dS}\cdot\frac{dS}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dS}$

В результате получим:

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dS}=\sum F_{k\tau}$$

Умножим обе части этого равенства на dS и внесем m под знак дифференциала.

Где $F_{k\tau}dS=dA_k$, а dA_k - элементарная работа силы $\overline{F}_k$. Тогда получим:

$$d(\frac{m\upsilon^2}{2})=\sum dA_k \tag{31}$$

Это и есть теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме.

Проинтегрировав обе чести уравнения (31), получим:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2}-\frac{m\upsilon_0^2}{2}=\sum A(M_0M_1) \tag{32}$$

Это теорема об изменении кинетической энергии точки в конечном виде.

Задача. Груз под весом *P=50Н* подвешен на нити длиной *l=0,5 м*. Груз отклоняют на угол $\varphi_0=45^0$ и отпускают без начальной скорости ($\upsilon_0=0$). Найти скорость груза в тот момент времени, когда нить образует с вертикалью угол $\varphi_0=30^0$ (рис. 139), если на него действует постоянная сила сопротивления *R=5 Н*.

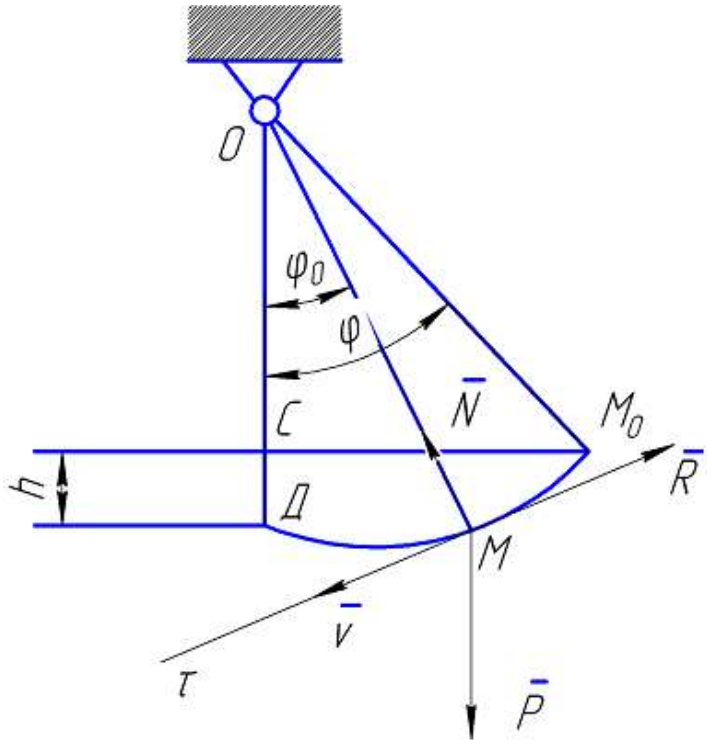


Рис. 139

Решение. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки (32):

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum A_k$$

Приложим силы, действующие на точку: сила тяжести $\overline{P}$, реакция нити $\overline{N}$ и сила сопротивления $\overline{R}$.

Работа силы тяжести $\overline{P}$ равна: $A(\overline{P}) = P \cdot h$. Работа силы $\overline{N}$ будет равна: $A(\overline{N}) = 0$, т.к. $N_\tau = 0$; работа силы сопротивления при *R=const* и $R_\tau = -R$, то $A(\overline{R}) = -R \cdot S$, где $S = l \cdot \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi$, *S*- длина дуги, т.е. $A(\overline{R}) = -Rl(\varphi_0 - \varphi)$. Так как по условию задачи $\upsilon_0 = 0$, то имеем:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = Ph - Rl(\varphi_0 - \varphi)$$ и φ_0, φ измеряется в радианах

$$\upsilon = \sqrt{2gh - \frac{2glR(\varphi_0 - \varphi)}{P}}$$

Значение $h = OД - OC = OM_0 \cdot \cos 45^0 - OM \cdot \cos 30^0 = 0.083$ м

Подставляя известные величины в последние уравнения, получим:

$$\upsilon = 1.26 \text{ м/с}$$

3 НЕСВОБОДНОЕ И ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1 Несвободное движение точки

Движение материальной точки называют несвободным, если на нё положены связи, заставляющие двигаться точку по заданной поверхности или кривой.

Рассмотрим движение точки по заданной неподвижной кривой под действием активных сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, …., $\overline{F}_n$ и реакции связи $\overline{N}$ (рис. 140)

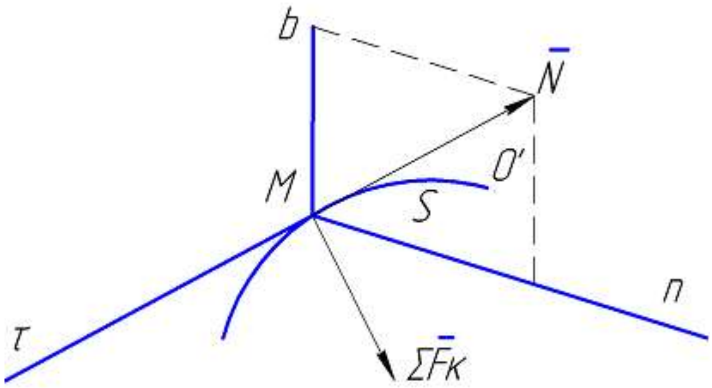


Рис. 140

Выберем начало отсчёта точку O' и положение точки M определяем координатой $S = O'M$. Возьмём систему отсчёта $M_{\tau n b}$ и воспользуемся уравнениями (11):

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=\sum F_{k\tau}\,,\; m\frac{\upsilon^2}{\rho}=\sum F_{kn}\,,\; 0=\sum F_{kв}$$

В результате получим: уравнения движения:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=\sum F_{k\tau} \text{ или } m\frac{d^2S}{dt^2}=\sum F_{k\tau} \tag{33}$$

$$\frac{m\upsilon^2}{\rho}=\sum F_{kn}+N_n\,,\; 0=\sum F_{kв}+N_в \tag{34}$$

Уравнения (33) позволяют определить закон движения *S=f(t)*.

Уравнения (34) служат для определения реакции связи *N*.

Задача. Груз весом *P=50H*, подвешенный на нити длиной *l=1 м*, отклоняют на угол $\alpha=60^0$ и отпускают без начальной скорости ($\upsilon_0=0$). Определить натяжение нити, когда груз займёт наинизшее положение.

Решение. Изобразили груз в наинизшем положении и приложим действующие к нему силы (рис.141).

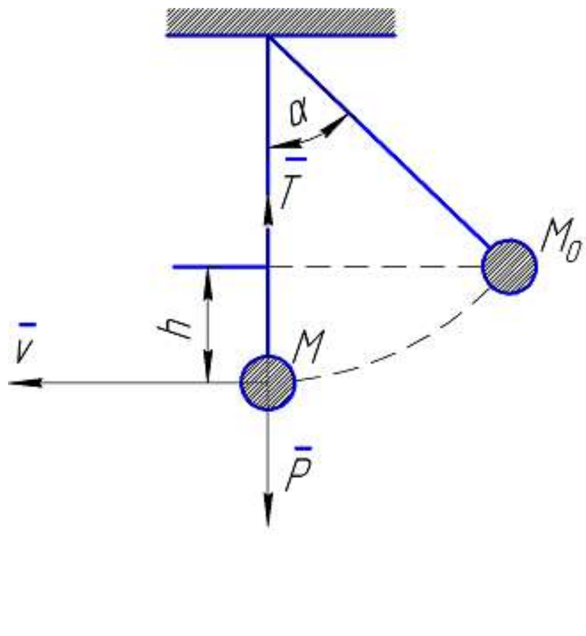


Рис. 141

На груз действуют две силы: сила тяжести $P=mg$ и сила реакции нити $\bar{T}$, направленная по нормали n в сторону вогнутости траектории кривой.

Составляем уравнения движения груза (34), учитывая, что $\rho = l$.

$\frac{m\upsilon^2}{l} = T - P$ или $T = P + \frac{m\upsilon^2}{l}$, где υ - скорость груза в положении *M*, которую находим из уравнения:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum A_k$$

Работу на участке M_0M совершает только сила $\overline{P}$

$$A(\overline{P}) = P \cdot h = P \cdot l(1 - \cos\alpha)$$

По условию задачи $\upsilon_0 = 0$. Тогда $\frac{m\upsilon^2}{2} = Pl(1 - \cos\alpha)$, откуда:

$\upsilon = \sqrt{\frac{2Pl(1 - \cos\alpha)}{m}}$ или $\upsilon = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}$ подставив известные величины, получим $\upsilon = 3.13$ м/с

Окончательно $T = P + \frac{m\upsilon^2}{l} = 100$ Н.

3.2 Относительное движение точки

Второй закон динамики и полученные из него теоремы верны для абсолютного движения точки, которая перемещается в инерциальной системе отсчёта.

Рассмотрим относительное движение точки, т.е. движение по отношению к неинерциальной системе отсчёта (произвольно движущая по отношению к инерциальной).

Пусть точка *M* движется под действием приложенных сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, …, $\overline{F}_n$ в системе отсчёта O_{xy2} (рис.142), которая в свою очередь известным образом движется относительно инерциальной системы отсчёта (неподвижных осей) $O_1x_1y_1z_1$.

Согласно основному закону динамики для абсолютного движения имеем:

$$m\bar{a}_{\text{аб}} = \sum \bar{F}_k \tag{35}$$

где: $\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}$

Подставив это значение в равенство (35), получим $m\bar{a}_{\text{от}} = \sum \bar{F} + (-m\bar{a}_{\text{пер}}) + (-ma_{\text{кор}})$. Введём обозначения:

$$\bar{F}^{\text{И}}_{\text{пер}} = -m\bar{a}_{\text{пер}},\ \bar{F}^{\text{И}}_{\text{кор}} = -m\bar{a}_{\text{кор}},\ \bar{a}_{\text{от}} = \bar{a},$$

где $\bar{F}^{\text{И}}_{\text{пер}}$ - переносная сила инерции,

$F^{\text{И}}_{\text{кор}}$ - кориолисова сила инерции,

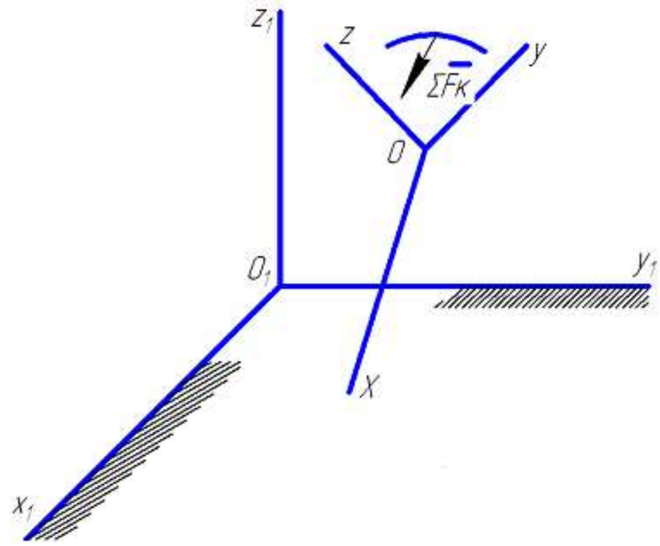


Рис.142

Окончательно получим:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}^{\text{И}}_{\text{пер}} + \bar{F}^{\text{И}}_{\text{кор}} \tag{36}$$

Силы инерции $\bar{F}^{\text{И}}_{\text{пер}}$ и $F^{\text{И}}_{\text{кор}}$ оказывают влияние на относительное движение точки, связанное с перемещением подвижных осей.

Частные случаи относительного движения точки

1. Подвижные оси движутся поступательно, то $F^{\text{И}}_{\text{кор}} = 0$, т.к. $\overline{\omega} = 0$ и уравнение (36) принимает вид

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k + \overline{F}^{\,И}_{пер}$$

2. Подвижные оси перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно. Тогда $\overline{F}^{\text{И}}_{\text{пер}} = F^{\text{И}}_{\text{кор}} = 0$ и $m\overline{a} = \sum \overline{F}_k$.

Такая система отсчёта будет инерциальной. В этом состоит открытый Галилеем *принцип относительности классической механики.* Никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчёта в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение.

3. Точка находится в покое по отношению к подвижным осям. Тогда $\overline{a} = 0$ и $\overline{\upsilon}_{\text{от}} = 0$, и $\overline{F}^{\text{И}}_{\text{кор}} = 0$. Следовательно, уравнение (36) принимает вид:

$$\sum \overline{F}_k + \overline{F}^{\text{И}}_{\text{пер}} = 0 \qquad (37)$$

Уравнение (37) представляет собой уравнение относительного равновесия (покоя) точки.

4. Если $\overline{F}^{\text{И}}_{\text{кор}} \neq 0$, $\overline{F}^{\text{И}}_{\text{кор}} = m\overline{a}_{\text{кор}} = -2m(\overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_{\text{от}})$

Следовательно, $\overline{F}^{\text{И}}_{\text{кор}} \perp \overline{\upsilon}_{\text{от}}$, а значит она перпендикулярна к касательной траектории точки. Поэтому:

а) $\overline{F}^{\text{И}}_{\text{кор}\tau} = 0$ и уравнение (11) имеет вид:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = \sum F_{k\tau} + F^{\,И}_{\text{пер}\tau} \qquad (38)$$

б) работа кариолисовой силы инерции на любом относительном перемещении равна нулю и теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении будет иметь вид:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum A_k + A(\overline{F}_{\text{пер}}^{\text{И}}) \qquad (39)$$

где υ_1 и υ_0 - значения относительных скоростей.

Задача. Часть полукруга *ACB* (рис.143) радиуса r=0.5 м вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\frac{рад}{с}$. По ней из точки *A* начинает скользить шайба без трения. Найти относительную скорость υ шайбы, когда она окажется в положении *C*, если её начальная скорость $\upsilon_0 = 0$.

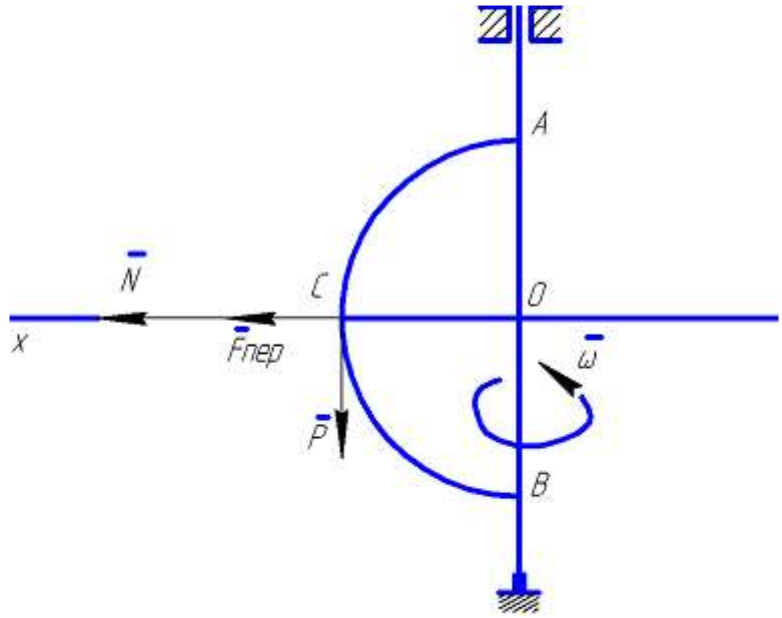


Рис. 143

Решение. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в относительном движении

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = A(\overline{P}) + A(\overline{F}_{\text{пер}}^{\text{И}})$$

Работа $A(\overline{N}) = 0$

Определим работы сил $\overline{P}$ и $\overline{F}_{\text{пер}}^{\text{И}}$.

Работа $A(\overline{P}) + Ac(m\overline{g}) = mgr$

Так как $x_A = 0$ найдем:

$$A_{AC}(\overline{F}^{И}_{\text{пер}}) = \int\limits_{(A)}^{(C)} F^{И}_{\text{пер}} dx \text{, где } F^{И}_{\text{пер}} = m\omega^2 x \text{ или } A_{AC}(\overline{F}^{И}_{\text{пер}}) = m\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

При $\upsilon_0 = 0$, имеем $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = m\dfrac{\omega^2 r^2}{2} + mgr = mr(\dfrac{\omega^2 r}{2} + g)$

$\upsilon = \sqrt{2gr(1+\dfrac{\omega}{2g})}$. Подставив известные значения, получим $\upsilon = 3.8$ м/с

3.3 Влияние вращения земли на равновесие и движение тел

Суточное вращение Земли по отношению к звёздам происходит с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0{,}000073 \text{ с}^{-1}$$

Это вращение Земли сказывается на равновесии и движении тел вблизи земной поверхности.

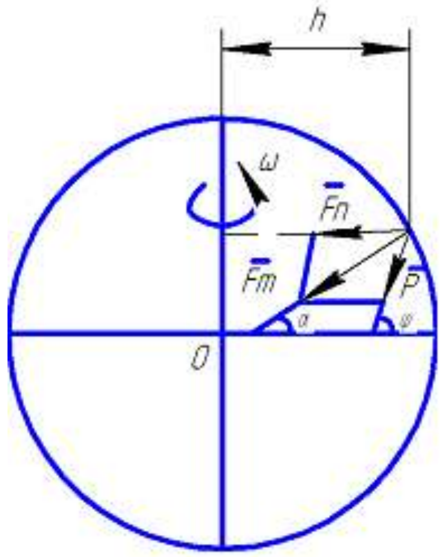


Рис. 144

1. Сила тяжести. Это сила $\overline{P}$, которая является составной частью силы тяготения $\overline{F}_{т}$, которая разлагается на силы $\overline{F}_n$ и $\overline{P}$ (рис. 144). Сила $\overline{F}_n$ направлена к земной оси и сообщает точке, находящейся на поверхности, нормальное ускорение $\overline{a}_n$. Если масса точки m, а её расстояние от земной оси h, то $\overline{F}_n = m\overline{a}_n$ и численно $\overline{F}_n = m\omega^2 h$.

Другая составляющая силы $\overline{F}_{т}$ - сила $\overline{P}$ и называется *силой тяжести.*

$$\overline{P} = \overline{F}_{т} - \overline{F}_{п}$$

Направление силы $\overline{P}$ определяется вертикалью в данном пункте земной поверхности (таким будет направление нити, на которой подвешен груз; натяжение нити при этом равно $\overline{P}$), а плоскость перпендикулярная силе $\overline{P}$ является горизонтальной плоскостью.

Так как сила $\overline{F}_n = m\omega^2 h$, где ω^2 - очень мало, то и сила $\overline{P}$ и численно, и по направлению мало чем отличается от силы тяготения $\overline{F}_{т}$. Модуль силы $\overline{P}$ называется *весом тела.*

2. Относительный покой и относительное движение вблизи земной поверхности.

С учётом силы тяготения $\overline{F}_{т}$ уравнение относительного равновесия имеет вид:

$$\sum \overline{F}_k + \overline{F}_{т} + \overline{F}^{И}_{пер} = 0$$

В нашем случае $\overline{a}_{пер} = \overline{a}_n$ и $\overline{F}^{И}_{пер} = -m\overline{a}_{пер} = -m\overline{a}_n = -\overline{F}_n$. Тогда $\overline{F}_{т} + \overline{F}^{И}_{пер} = \overline{F}_{т} - \overline{F}_n = \overline{P}$ и уравнение имеет вид $\sum \overline{F}_k + \overline{P} = 0$, т.е. случай, когда система отсчёта, связанная с Землей, считается неподвижной.

И теперь уравнение относительного движения будет:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k + \overline{P} + \overline{F}^{И}_{кор}$$

где $\overline{F}^{И}_{кор} = 2m\omega\upsilon \sin\alpha$, где α - угол между относительной скоростью $\overline{\upsilon}$ точки и земной осью.

Так как угловая скорость ω вращения Земли мала, то величиной $\overline{F}^{\text{и}}_{\text{кор}}$ по сравнению с силой тяжестью $\overline{P}$ можно пренебречь.

Учет вращения Земли имеет практическое значение или при очень больших скоростях движения тел (скорость полёта ракет), или для движений, длящихся очень долго (течение рек, воздушные и морские течения).

Отсюда заключаем:

а) тело, движущееся в северном полушарии вдоль земной поверхности по любому направлению, будет вследствие вращения Земли отклоняться вправо от направления движения. В южном полушарии отклонение происходит влево.

Этим обстоятельством объясняется закон Бэра: реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый берег;

б) тело, которое совершает свободное падение, отклоняется вследствие вращения Земли от вертикали к востоку.

4 ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

4.1 Свободные колебания без учета сил сопротивления

Рассмотрим движение точки M под действием восстанавливающей силы $\overline{F}$ (рис. 145).

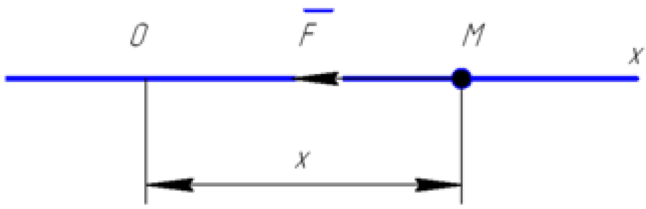


Рис.145

Проекция силы $\overline{F}$ на ось Ox будет:

$$F_x = -cx \tag{40}$$

Сила $\overline{F}$ стремится вернуть точку в положение равновесия (точку O).

Составив дифференциальное уравнение движения точки $m\ddot{x} = F_x$ или $m\ddot{x} = -cx$, можно найти закон движения точки M. Очевидно, что

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{41}$$

Решая его, получим:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \tag{42}$$

или

$$x = A\sin(kt + \alpha) \tag{43}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, c- коэффициент упругости (жесткости), измеряется в системе СИ в $\dfrac{Н}{\text{м}}$ или $\dfrac{Н}{\text{см}}$.

C_1, C_2- постоянные интегрирования;

A и α - постоянны интегрирования.

Колебания, происходящие по закону (42), (43) называются *гармоническими колебаниями.*

Здесь A – амплитуда колебаний – наибольшее отклонение от положения равновесия

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \tag{44}$$

зависящая от начальных условий,

где x_0 - начальное положение точки при t=0;

$\dot{x}_0$ - начальная скорость точки при t=0.

Скорость точки в рассматриваемом движении будет:

$$\sqrt{x} = \dot{x} = A\cos(kt+\alpha) \tag{45}$$

k - циклическая или круговая частота колебаний – число колебаний точки за 2π секунд:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{46}$$

Измеряется круговая частота в системе СИ в $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ и от начальных условий не зависит.

Величина $\varphi = kt + \alpha$ называется фазой колебаний, α - начальная фаза колебаний, где

$$tg\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} \tag{47}$$

Периодом колебания Т называется промежуток времени, в течении которого точка совершает одно полное колебание. По истечении периода фаза изменяется на 2π. Следовательно, должно выполняться:

$$kT = 2\pi, \text{ откуда } T = \frac{2\pi}{k} \tag{48}$$

Число колебаний, совершаемых за 1 с, называется *частотой колебаний:*

$$v = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} \tag{49}$$

Отметим, что амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий, а частота k и период T колебаний от начальных условий не зависят.

Рассмотренные колебания являются линейными, так как они описываются линейными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим колебание точки M массы m под действием постоянной силы.

Пусть точка подвешена к нижнему концу пружины, верхний конец которой прикреплен к потолку (рис. 146).

На рисунке 22а изображена недеформированная пружина, не нагруженная материальной точкой M. На рис. 147.б нижний конец пружины растянут силой тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$ на величину $\lambda_{ст} = \dfrac{mg}{c}$; c – жёсткость пружины.

На рис. 147.в материальная точка изображена во время движения, при этом нижний конец пружины удлинён на $\lambda = \lambda_{ст} + x$.

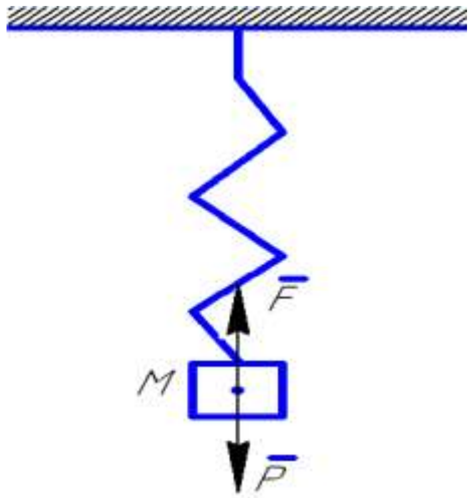


Рис. 146

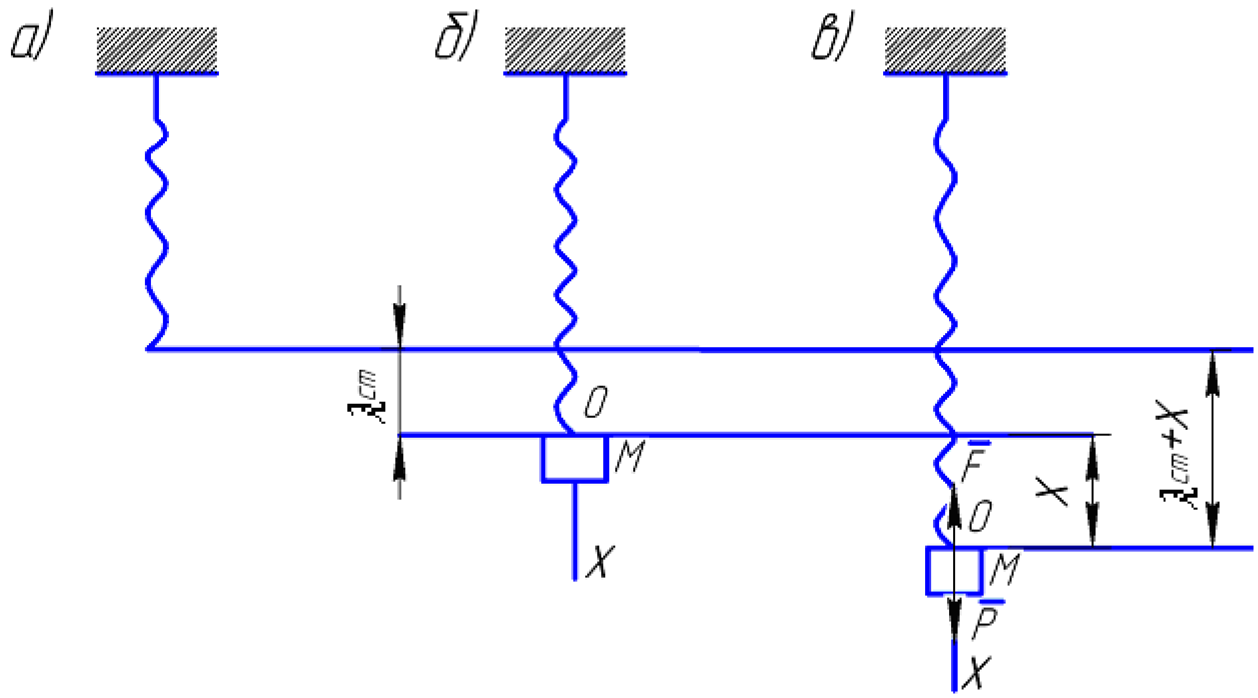


Рис.147

Тогда $F_x = -c \cdot \lambda = -c(\lambda_{\text{ст}} + x)$. Тогда дифференциальное уравнение движения будет:

$$m\ddot{x} = -c(\lambda_{\text{ст}} + x) + P$$

Где по условию сила тяжести $P = mg = c\lambda_{\text{ст}}$ (в равновесии сила $\bar{P}$ уравновешивается силой упругости $F = c\lambda_{\text{ст}}$). Так как $k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{g}{\lambda_{\text{ст}}}$, получаем уравнение $\ddot{x} + k^2 x = 0$

$$\text{где } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}} \tag{50}$$

Период колебания равен:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{\text{ст}}}{\text{g}}} \tag{51}$$

Решением полученного дифференциального уравнения будет:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$

По начальным условиям при $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, закон свободных колебаний имеет вид:

$$x = A\sin(kt + \alpha)$$

Задача. Пружина *AB*, закрепленная одним концом в точке *A*, такова, что для удлинения её на 1 м необходимо приложить в точке *B* при статической нагрузке силу 39,2 *Н*.

В некоторый момент к нижнему концу *B* недеформированной пружины подвешивают гирю массы *m*=0,2 кг и отпускают её без начальной скорости. Определить уравнение движения гири, амплитуду и период колебания, проведя ось вертикально вниз из положения статического равновесия.

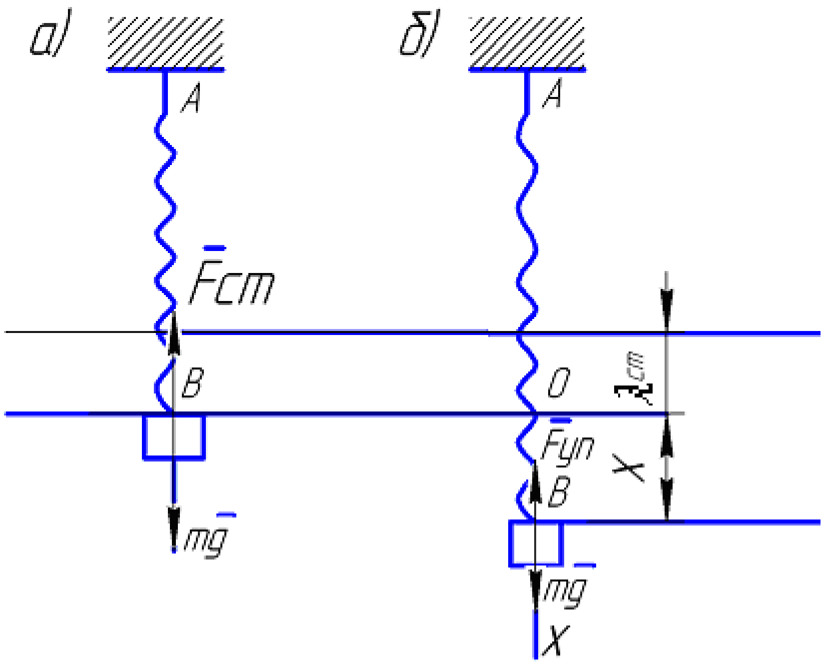


Рис.148

Решение. Поместим начало координат *O* в положение статического равновесия груза и направим ось *Ox* по вертикали вниз (рис.148).

В положении статического равновесия (рис. 21а) сила упругости $F_{ст}$ равна весу тела, т.е. $F_{ст} = mg$, где $F_{ст} = c\lambda_{ст}$. Тогда $c\lambda_{ст} = mg$ (а)

Коэффициент жесткости *C* нашей пружины определяем из условия задачи:

$F = c \cdot \Delta l$, где Δl=1 м, F =39,2 Н. Тогда $c \cdot 1$=39,2; $c = 39.2\frac{Н}{м}$

Теперь из уравнения (а) определяем $\lambda_{cm} = \frac{mg}{c} = 0.05$ м

Составим дифференциальное уравнение движения груза на основании 2 закона Ньютона

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} \text{ или}$$

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{уп}}, \text{ где } F_{\text{уп}} = -c(\lambda_{\text{ст}} + x)$$

$$m\ddot{x} = mg - c(\lambda_{\text{ст}} + x), \text{ где } mg - c\lambda_{\text{ст}} = 0$$

Тогда $m\ddot{x} - cx = 0$; $\ddot{x} - \dfrac{c}{m}x = 0$; обозначим $\dfrac{c}{m} = k^2$. Имеем $\ddot{x} + k^2 x = 0$, где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$

Определим период колебаний груза:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0.45c$$

Решением дифференциального уравнения будет:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$

Согласно начальных условий:

$t = 0$, $x_0 = -\lambda_{ст} = -0{,}05м$, $\upsilon_0 = \dot{x}_0 = 0$, и что скорость $\upsilon_x = \dot{x} = kC_1 \cos kt - kC_2 \sin kt$ имеем $C_1 = 0$, $C_2 = -\lambda_{\text{ст}} = -0{,}005$. Следовательно $x = -0{,}05\cos 14t$ м, где амплитуда A равна A=5 см.

4.2 Свободные колебания при вязком сопротивлении (затухающие колебании)

При движении материальной точки в среде возникает сила сопротивления движению, которая при малых сопротивлениях пропорциональна первой степени скорости точки:

$R = \beta\upsilon$ или в векторной форме

$$\overline{R} = -\beta\overline{\upsilon} \qquad (52)$$

где: β - постоянный коэффициент.

Знак минус указывает, что сила $\overline{R}$ направлена противоположно $\overline{\upsilon}$.

Рассмотрим свободные колебания материальной точки при наличии сил сопротивления $\overline{R}$ и восстанавливающей силы $\overline{F} = -cx$ (рис. 149).

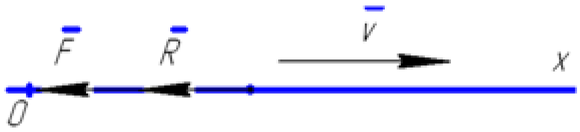


Рис.149

Тогда $F_x = -cx$, $R_x = -\beta\upsilon_x = -\beta\dot{x}$. Тогда дифференциальное уравнение движения будет:

$$m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x} \text{ или}$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (53)$$

его решение ищут в виде $x = e^{nt}$, где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $2n = \dfrac{\beta}{m}$.

Величины k и n имеют одинаковые размерности $(\frac{1}{c})$.

Различают 3 вида движения: $n < k$ - случай малого сопротивления;

$n > k$ - случай большого сопротивления;

$n = k$ - предельный случай.

а) случай малого сопротивления $k > n$, т.е. когда сопротивление по сравнению с восстанавливающей силой мало. Тогда его решением будет:

$$x = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha) \tag{54}$$

или

$$x = Ae^{-nt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \tag{55}$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ Постоянные интегрирования A и α (или C_1 и C_2) определяются по начальным условиям задачи:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n}}, \quad tg\alpha = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x} + nx_0}$$

Колебания, происходящие по закону (54) или (55), называются *затухающими.* Это движение не является периодическим, т.к. величина Ae^{-nt} переменная и убывает по экспоненциальному закону.

Очевидно, что $k_1 < k$ и называется *круговой частотой.*

Период колебания T_1 равен:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} \tag{56}$$

где $T_1 > T$, т.к. $T_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{n}{k})^2}} \cdot T$

Значит, сила сопротивления, пропорциональная скорости, увеличивает период колебания. Амплитуды колебаний убывают с каждым полупериодом (рис.150) по закону геометрической прогрессии.

$$q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-\frac{nT_1}{2}}$$

Знаменатель этой прогрессии e^{-nT_1} называется *декрементом колебаний*.

Величина $\ln\dfrac{a_i}{a_{i+1}}=\dfrac{nT_1}{2}$ - называется *логарифмическим декрементом колебаний*.

Из всех полученных данных следует, что малое сопротивление почти не влияет на период колебаний.

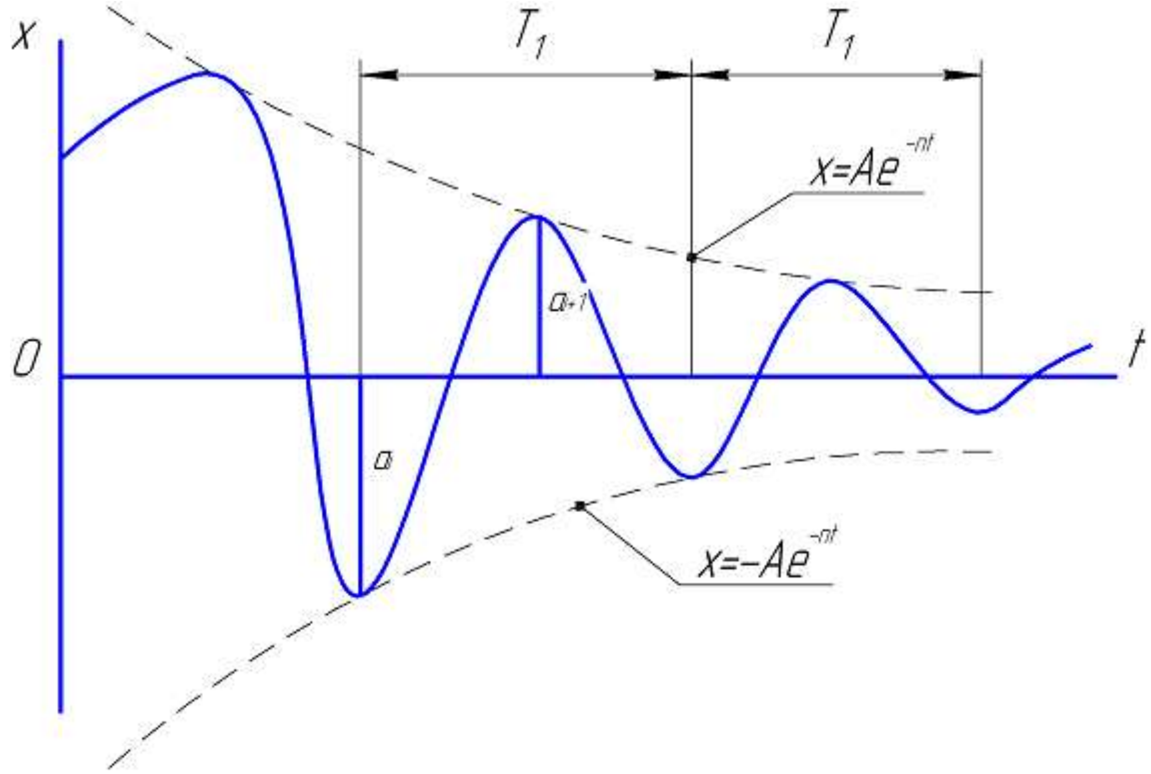


Рис.150

б) случай большого сопротивления $n > k$. Материальная точка совершает затухающее апериодическое движение согласно уравнению:

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + C_2 e^{\sqrt{n^2-k^2}t}) \tag{57}$$

При $t\to\infty$ $x\to 0$ и движение точки не будет колебательными, т.к. функция e^{-nt} монотонно убывает (рис.151). График движения зависит от начальных условий. В этом случае движение быстро затухает.

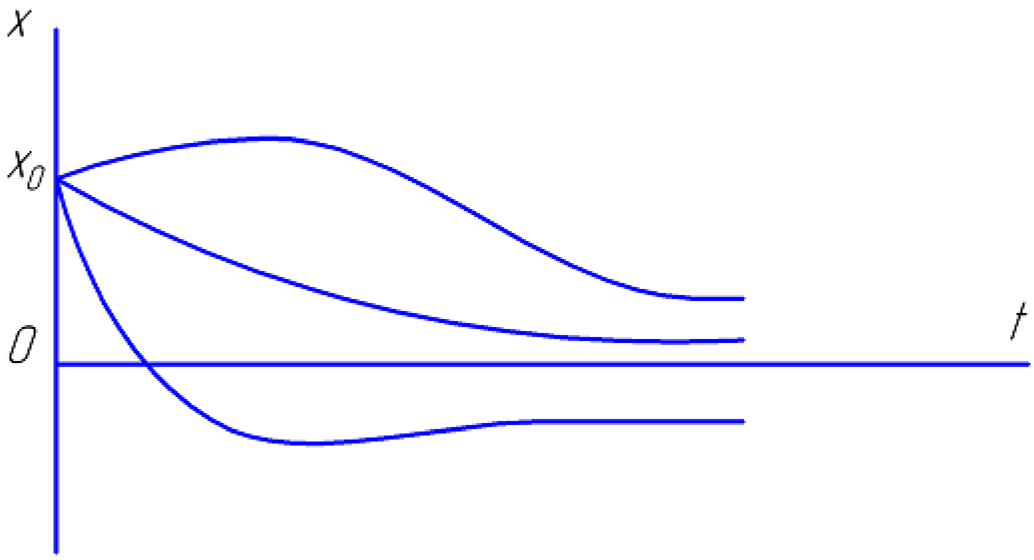


Рис.151

в) предельный случай $n = k$. Материальная точка совершает затухающее апериодическое движение

$$x = e^{-nt}\left[C_1 + C_2 \cdot t\right] \tag{58}$$

Характер движения зависит от начальных условий движения и не будет колебательным и быстро затухает.

4.3 Вынужденные колебания

Рассмотрим колебания, когда на точку кроме восстанавливающей силы $\bar{F}$ действует ещё периодически изменяющая по времени возмущающая сила $\bar{Q}$ проекция которой на ось Ox равна:

$$Q = H\sin(\rho \cdot t + \delta) \tag{59}$$

где H – наибольшее значение возмущающей силы.

Такая возмущающая сила возникает при работе машин и механизмов (турбинные диски, роторы, электромоторы, маховики и др.)

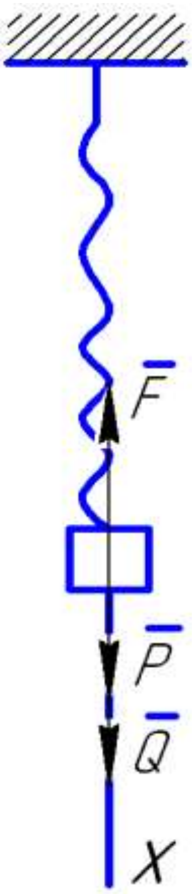
Колебания под действием возмущающей силы называют *вынужденными.* Величина ρ в равенстве (59) называется *частотой возмущающей силы*. Возмущающая сила, определяемая равенством (59) *называется гармонической*.

δ - начальная фаза

1. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления.

Рассмотрим движение точки, на которую действует возмущающая сила $\overline{Q}$ (рис. 152), восстанавливающая сила $\overline{F}$ и сила тяжести $\overline{P}$.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки будет:



$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin(\rho t + \delta) \tag{60}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $h = \dfrac{H}{m}$. Закон движения точки при $\rho \neq k$ будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 - общее решение однородного дифференциального уравнения;

x_2 - частное решение неоднородного уравнения, где $x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, $x_2 = \dfrac{h}{k^2 - \rho^2}\sin(\rho t + \delta)$.

Согласно начальным условиям $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ постоянные интегрирования будут:

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - \rho^2}\sin\delta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{\rho h}{k(k^2 - \rho^2)}\cos\delta$$

Рис. 152

Окончательно уравнение движения материальной точки имеет вид:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt - \frac{h}{k^2 - \rho^2}(\sin\delta\cos kt + \frac{\rho}{k}\cos\delta\sin kt) + \frac{h}{k^2 - \rho^2}\sin(\rho t + \delta) \tag{6 1}$$

Первые два слагаемых равенства (61) определяют свободные колебания при отсутствии возмущающей силы. Третье слагаемое определяет колебания точки, имеющие частоту свободных колебаний и вызванные возмущающей силой $\overline{Q}$.

Вынужденные колебания $x_2 = \dfrac{h}{k^2 - \rho^2}\sin(\rho t + \delta)$ имеют частоту ρ, равную частоте ρ изменения возмущающей силы (т.е. и периоды вынужденных колебаний и возмущающей силы $\overline{Q}$ равны).

Амплитуда вынужденных колебаний *a* равна:

$$a = \frac{h}{\left|k^2 - \rho^2\right|}$$

Статистическое смещение материальной точки под действием постоянной силы *H* равно $\Delta H = \dfrac{H}{c}$.

Коэффициентом динамичности λ называется отношение $\dfrac{a}{\Delta H}$. Коэффициент динамичности λ показывает, во сколько раз наибольшее динамическое смещение материальной точки, вызываемое возмущающей силой $Q = H\sin(\rho t + \delta)$, больше статического смещения ΔH.

Коэффициент расстройки *Z* равен: $Z = \dfrac{\rho}{k}$. Коэффициент динамичности λ и коэффициент расстройки *Z* связаны зависимостью:

$$\lambda = \frac{1}{\left|1 - z^2\right|}$$

Графиком этой функции является (рис.153)

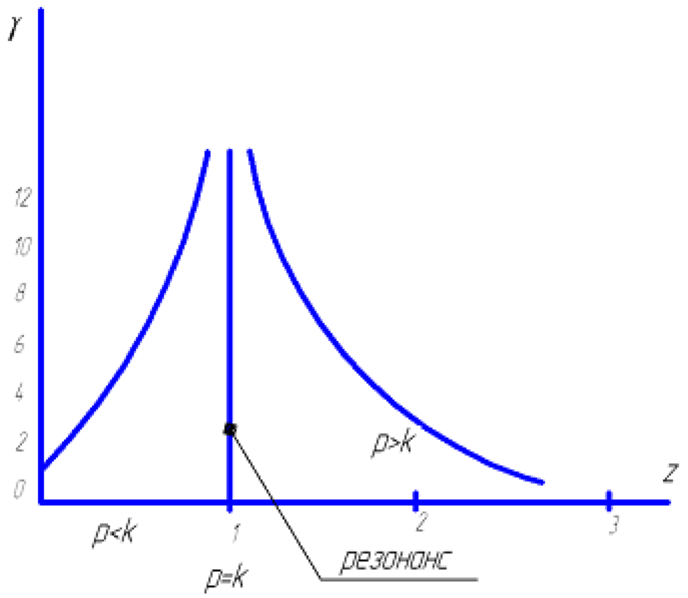


Рис.153

1. Случай. $0 < Z < 1$, т.е. при $\rho < k$, происходят вынужденные колебания малой частоты. λ растёт от единицы до бесконечности.

2. Случай. $Z \to 1$, т.е. при $\rho \to k$, $\lambda \to \infty$.

При $\rho = k$, т.е. когда частоты свободных вынужденных колебаний совпадают имеет место явление, называемое *резонансом*.

3. Случай. $Z > 1$, т.е. при $\rho > k$ происходят вынужденные колебания большой частоты. При $Z \to \infty$ коэффициент динамичности λ убывает до нуля.

Уравнение движения материальной точки в случае резонанса имеет вид:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{h}{2k^2} \cos \delta \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta) \qquad (62)$$

При резонансе амплитуда вынужденных колебаний $a = \frac{h}{2k} t$ растет прямо пропорционально времени (рис.154). При $\rho = k$ $x_2 = -\frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta)$

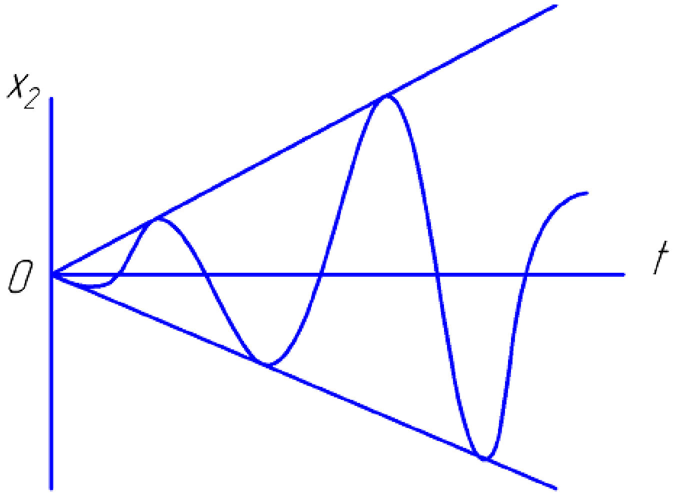


Рис. 154

4.4 Вынужденные колебания при вязком сопротивлении

Рассмотрим колебания груза массы m под действием возмущающей силы $\overline{Q}$, восстанавливающей силы $\overline{F}$ и силы сопротивления $\overline{R} = -\beta\overline{\upsilon}$, где β - постоянный коэффициент (рис. 155).

Пусть возмущающая сила $\overline{Q}$ изменяется по закону:
$Q = H\sin(pt + \delta)$ и начало отсчёта возьмём в положении статического равновесия.

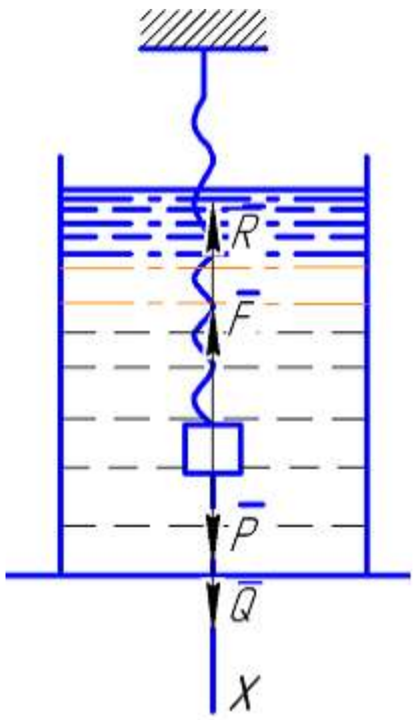


Рис. 155

Тогда при наличии силы сопротивления дифференциальное уравнение движения точки будет:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(\rho t + \delta) \tag{63}$$

где $2n = \dfrac{\beta}{m}$, $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $h = \dfrac{H}{m}$

Уравнение движения точки является:

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 - общее решение однородного дифференциального уравнения;

x_2 - частное решение неоднородного дифференциального уравнения;

И равно:

$$x_2 = a\sin(\rho t + \delta - \varepsilon) \tag{64}$$

$$\varepsilon = arctg\,\frac{2n\rho}{k^2 - \rho^2}$$

Обозначим $a\sin(\rho t + \delta - \varepsilon) = A(t)$. Тогда в зависимости от соотношений $n < k$, $n > k$, $n = k$ имеем:

$$x = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{e}^{-\mathrm{nt}}(c_1 \sin\sqrt{\mathrm{k}^2 - n^2}\,t + c_2 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t) + A(t)\ \text{при}\ \mathrm{n} < \mathrm{k} \\ \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{nt}}(c_1 + c_2 \mathrm{t}) + A(k)\ \text{при}\ \mathrm{n} = \mathrm{k} \\ \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{nt}}(c_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}\,t} + c_2 e^{\sqrt{n^2 - k^2}\,t}) + A(t)\ \text{при}\ \mathrm{n} > \mathrm{r} \end{array} \right\}$$

5 ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

5.1 Геометрия масс

1. Центр масс материальной системы

Центром масс материальной системы называется точка, положение которой определяется радиусом-вектором $\bar{r}_с$ по формуле:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{\kappa=1}^{n} m_к \bar{r}_\kappa}{M} \tag{66}$$

где: $M = \sum_{\kappa=1}^{n} m_к$ - масса материальной системы (рис. 156)

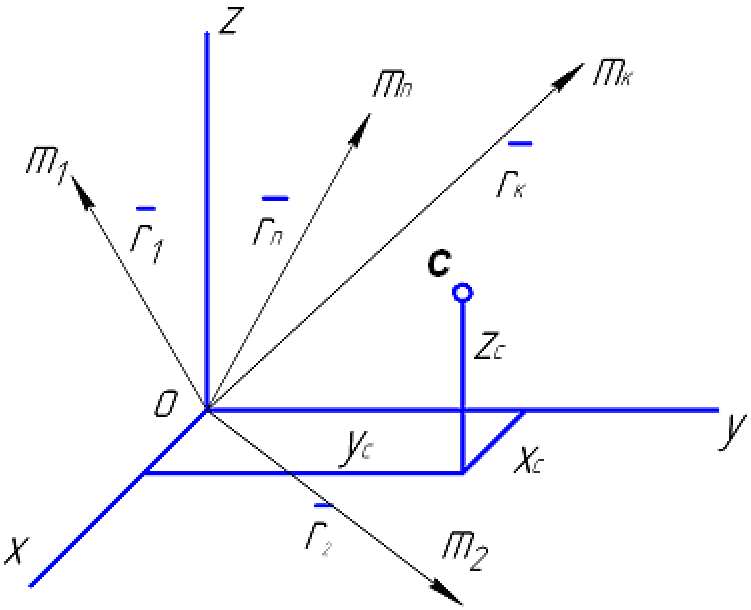


Рис. 156

Преобразовав формулы для координат центра тяжести, получим формулы координат центра тяжести, выраженные через массу:

$$x_c = \frac{1}{M}\sum m_к x_к,$$

$$y_c = \frac{1}{M}\sum m_к y_к, \tag{67}$$

$$z_c = \frac{1}{M}\sum m_к z_к$$

В однородном поле тяжести, где $g = const$ положение центра масс и центра тяжести совпадают.

5.2 Моменты инерции твердых тел

Моментом инерции J_z *твердого тела* относительно оси Z называется сумма произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадраты их расстояний до оси:

$$J_z = \sum_{к=1}^{n} \mathrm{m}_к r_к^2 \tag{68}$$

Момент инерции положителен и характеризует распределение масс материальных точек относительно оси.

Момент инерции измеряется в системе СИ – в $кг \cdot м^2$.

Если масса материальных точек распределена непрерывно, то момент инерции тела равен:

$$\mathrm{J}_z = \int_{(м)} r^2 dm$$

В случае однородного тела имеем:

$$J_z = \frac{M}{V} \int\limits_{(V)} r^2 dv \tag{69}$$

где M- масса твердого тела, V – объем твердого тела, dV – элемент объема.

5.3 Моменты инерции некоторых однородных тел

1. Тонкий однородный стержень (рис.157)

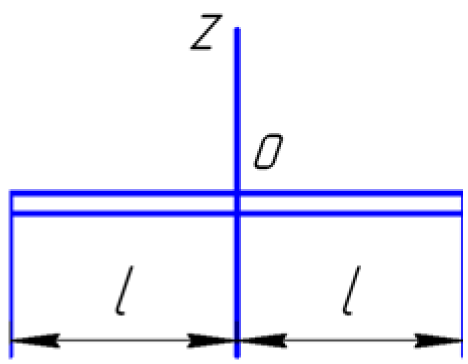


Рис. 157

$$J_z = \frac{Ml^2}{3} \tag{70}$$

2. Однородное кольцо. Ось Z перпендикулярна плоскости кольца (рис.158).

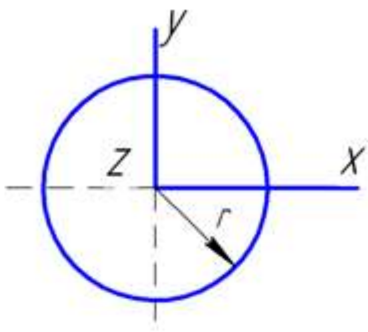
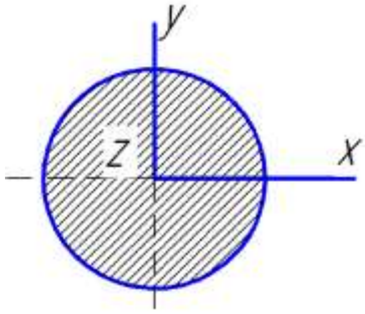


Рис. 158

$$J_z = Mr^2 \tag{71}$$

3. Тонкий круглый диск. Ось Z перпендикулярна плоскости диска (159).

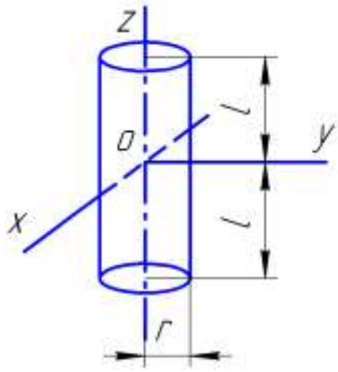


$$J_x = J_y = \frac{Mr^2}{4}$$

$$J_z = \frac{Mr^2}{2} \qquad (72)$$

Рис. 159

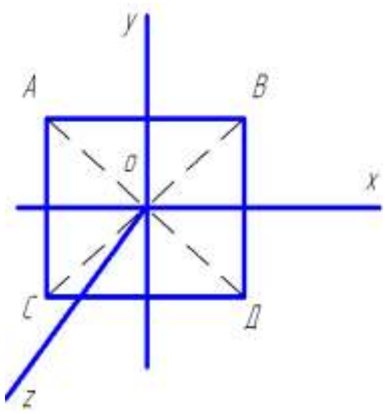
4. Круглый цилиндр (рис.160).



$$J_x = J_y = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$$

$$J_z = \frac{Mr^2}{2} \qquad (73)$$

Рис. 160



5. Прямоугольная пластина массы M (рис.161).

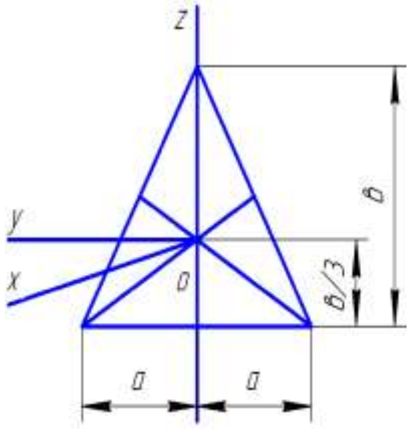
AB=a, *ВД=в*, *AB//Ox*, *ВД//Oy*

$$J_x = \frac{M в^2}{12},$$

$$J_y = \frac{Ma^2}{12} \qquad (74)$$

$$J_z = \frac{M(a^2 + в^2)}{12}$$

Рис. 161



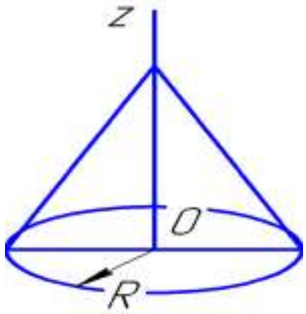
6. Треугольник (рис.162).

$$J_x = \frac{M(3a^2 + в^2)}{18},$$

$$J_y = \frac{Mв^2}{18}, \qquad (75)$$

$$J_z = \frac{Ma^2}{6}$$

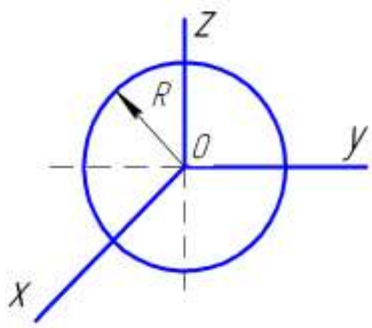
Рис.162



7. Прямой сплошной круглый конус (рис.163) массой M с радиусом основания R (ось Z направлена вдоль оси конуса).

$$J_z = 0{,}3MR^2 \qquad (76)$$

Рис.163

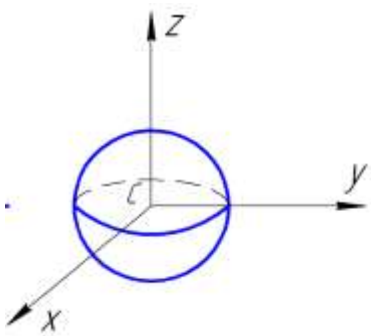


8. Сплошной шар массой M и радиусом R (рис.164).

$$J_x = J_y = J_x = \frac{2}{5}MR^2 \qquad (77)$$

Рис.164

9. Тонкая сфера массой R и радиусом R (рис.165).



$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3}MR^2 \qquad (78)$$

Рис.165

5.4 Теорема Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции относительно параллельных осей

Радиусом инерции ρ тела относительно оси называется величина, произведение квадрата которой на массу твердого тела равно моменту инерции твердого тела относительно этой оси:

$$J_z = M\rho^2 \tag{79}$$

Например, для шара $J_z = \frac{2}{5}MR^2 = M \cdot \rho^2$, откуда $\rho = 0.63R$.

Моменты инерции твердого тела относительно разных осей будут разными.

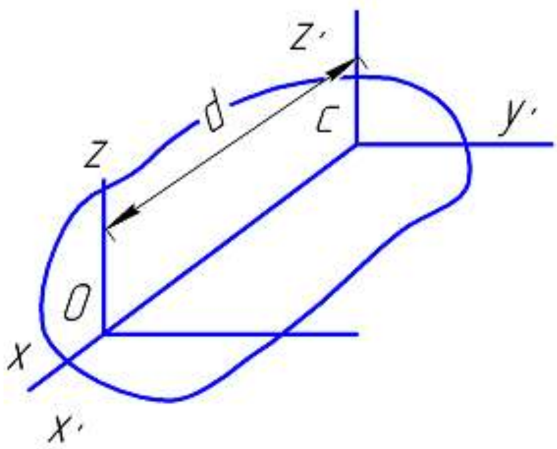


Рис.166

Момент инерции твердого тела относительно какой-либо оси (рис.166) равен моменту инерции тела относительно ей параллельной центральной оси, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями

$$J_z = J_z^{/} + Md^2 \tag{80}$$

Формула (80) и есть теорема Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции относительно параллельных осей. Из формулы (80) видно, что $J_z > J_z^{/}$. Из всех осей данного направления наименьшим моментом инерции характеризуется центральная ось.

5.5 Центробежные моменты инерции

Если через точку *O* твердого тела провести координатные оси *Oxyz*, то по отношению к этим осям центробежными моментами инерции (или произведениями инерции) называют величины J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}, определяемые равенствами:

$$J_{xy} = \sum m_к x_к y_к\,,\; J_{yz} = \sum m_к y_к z_к\,,\; J_{zx} = \sum m_к z_к x_к \qquad (81)$$

где $m_к$ - массы точек;

$x_к$, $y_к$, $z_к$ - их координаты.

Очевидно, что $J_{xy} = J_{yx}$ и т.д.

Для сплошных тел формулы (81) принимают вид:

$$J_{xy} = \int_{(V)} \rho xy dV \quad \text{и т.д.} \qquad (82)$$

В отличие от осевых центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, в частности, при определенным образом выбранных осях *Oxyz* могут обращаться в нули.

5.6 Главные оси инерции

Главные оси инерции играют важную роль в динамике твердого тела. Если по ним направить координатные оси *Oxyz*, то все центробежные моменты инерции обращаются в нули, что существенно упрощает решение задач динамики для вращающихся тел, удара твердых тел и др.

Рассмотрим однородное тело, имеющее ось симметрии. Проведем координатные оси *Oxyz*, так, чтобы ось *Oz* была направлена вдоль оси симметрии (рис.167).

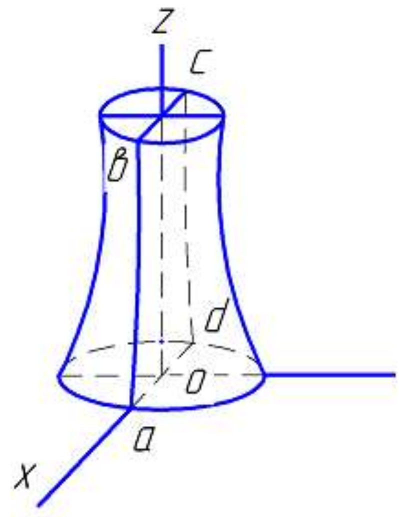


Рис.167

Тогда в силу симметрии каждой точке с массой $m_к$ и координатами $x_к$, $y_к$, $z_к$ будет соответствовать другая точка такой же массы, но с координатами $-x_к$, $-y_к$, $-z_к$. В результате имеем, что $\sum m_к x_к z_к = 0$ и $\sum m_к y_к z_к = 0$ и согласно уравнениям (81) получим:

$$J_{xy} = 0\,,\ J_{yz} = 0 \tag{83}$$

Ось *Oz* называется главной осью инерции тела для любой точки своей точки.

Главная ось инерции не обязательно является осью симметрии.

Если все центробежные моменты инерции равны нулю, то каждая из координатных осей является главной осью инерции тела для точки *O* (начала координат).

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции тела.*

Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называют *главными центральными осями инерции тела.*

Очевидно, что если тело имеет ось симметрии, то она является одной из главных центральных осей инерции тела. Если тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через центр масс тела будет являться одной из главных центральных осей инерции тела.

Известно, что через любую точку тела можно провести, по крайней мере, три взаимно перпендикулярные оси, для которых будут выполняться равенства:

$$J_{xy} = 0,\ J_{yz} = 0,\ J_{xz} = 0, \tag{83}$$

т.е. эти оси являются главными осями инерции тела для этой точки.

Понятие о главных осях инерции играют важную роль в динамике твердого тела. Существенно упрощается решение задач, связанных с динамическим уравнением вращающего тела, с центром удара и др.

5.7 Теорема о движении центра масс системы

При решении задач, где рассматривается характер движения механической системы и в других случаях (особенно движение твердого тела) важно знать закон движения ее центра масс.

Движение центра масс материальной системы зависит от внешних сил, приложенных к данной системе. Внутренние силы непосредственно на движение центра масс не влияют.

Теорема: центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему

$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_\kappa^e \tag{84}$$

Проектируя обе части уравнения (84) на координатные оси, получим:

$$M\ddot{x}_c = \sum \bar{F}_{\kappa x}^e,\ M\ddot{y}_c = \sum \bar{F}_{\kappa y}^e,\ M\ddot{z}_c = \sum \bar{F}_{\kappa z}^e \tag{85}$$

Уравнения (85) представляют собой дифференциальные уравнения движения центра масс.

Следствия из теоремы о движении центра масс:

1. Если сумма внешних сил равна нулю:

$$\sum \overline{F}_{к}^{e} = 0,$$

то из уравнения (84) следует $\overline{a}_{c} = 0$ или $\overline{\upsilon}_{c} = const$.

Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т.е. равномерно и прямолинейно.

Если в начале центр масс был в покое, то он и останется в покое.

2. Если сумма внешних сил не равна нулю ($\sum F_{к}^{e} \neq 0$), но сумма проекций на ось (пусть ось x) равна нулю:

$$\sum F_{кx}^{e} = 0, \text{ то } \ddot{x}_{c} = 0 \text{ и } \dot{x}_{c} = \upsilon_{cx} = const$$

Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная.

Эти следствия выражают собой закон – сохранения движения центра масс системы.

С помощью теоремы о движении центра масс можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики.

Задача. Колесо массы m=10 кг катится со скольжением (коэффициент трения скольжения f) по прямолинейному участку под действием постоянной силы Q=150 Н , приложенной к центру тяжести C (рис. 168).

Определить скорость центра масс колеса в любой момент времени, если в начале движения колесо находилось в покое.

Решение. Приложим к колесу, действующие внешние силы:

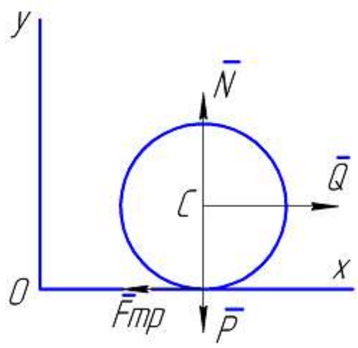


Рис.168

$\overline{P} = m\overline{g}$ - сила тяжести,

$\overline{Q}$ - движущая сила,

$\overline{N}$ - нормальная реакция поверхности,

$\overline{F}_{\text{тр}} = f\overline{N}$ - сила трения скольжения.

Применим теорему о движении центра масс в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x}_c = Q - F_{\text{тр}}, \qquad \text{(а)}$$

$$m\ddot{y}_c = N - P, \qquad \text{(б)}$$

Из последнего уравнения (б) имеем $N = P$, так как $y_c = R = const$, а значит $\ddot{y}_c = 0$.

Так как при качении колеса со скольжением сила трения достигает наибольшего значения и равна:

$$F_{\text{тр}} = fN \text{ или } F_{\text{тр}} = fP = fmg$$

Используя уравнение (а), получим:

$$\ddot{x}_c = \frac{Q - fmg}{m} \qquad \text{(в)}$$

Интегрируя уравнение (в), получим:

$$\ddot{x}_c = \frac{Q - fmg}{m} t + C_1 \tag{г}$$

Зная начальные условия $t = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ имеем $C_1 = 0$.

Подставив в (г) значение известных величин, получим:

$$\dot{x}_c = 14t \text{ м/с}$$

5.8 Теорема об изменении количества движения системы

Импульс силы $\overline{F}$, действующей в течение промежутка времени $t_2 - t_1$ определяется формулой:

$$\overline{S} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt \tag{85}$$

Если действующая сила постоянна по модулю и направлению, то импульс силы равен:

$$\overline{S} = \overline{F}(t_2 - t_1) \tag{86}$$

Проекции импульса силы на оси координат равны:

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt,\ S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt,\ S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \tag{86*}$$

где $S = S_{x\bar{i}} + S_{y\bar{j}} + S_{z\bar{k}}$

Модуль импульса силы $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$.

Количество движения $\overline{q}$ материальной точки массы *m*, движущейся со скоростью $\overline{\upsilon}$, есть:

$$\overline{q} = m\overline{\upsilon} \tag{87}$$

а его проекции на декартовы оси координат равны:

$$q_x = m\upsilon_x\,,\ q_y = m\upsilon_y\,,\ q_z = m\upsilon_z \qquad (87^*)$$

Модуль количества движения материальной точки:

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$

Количество движения в системе СИ измеряется в $\text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Главный вектор количеств движения материальной системы:

$$\overline{Q} = \sum_{\text{к}=1}^{\text{n}} \overline{\text{q}}_{\text{к}} = \sum m_{\text{к}} \overline{\upsilon}_{\kappa} = M \cdot \overline{\upsilon}_c \qquad (88)$$

Проекции главного вектора количеств движения системы на оси координат определяются формулами:

$$Q_x = \sum m_{\text{к}} \dot{x}_\kappa = M\dot{x}_c\,,\ Q_y = \sum m_{\text{к}} \dot{y}_\kappa = M\dot{y}_c\,,\ Q_z = \sum m_{\text{к}} \dot{z}_\kappa = M\dot{z}_c$$

где $\overline{Q} = Q_x \overline{i} + Q_y \overline{j} + Q_z \overline{k}$

Модуль главного вектора количеств движения системы равен:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}$$

Теорема. Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}} \qquad (89)$$

В проекциях на координатные оси будет:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{\text{кx}}^{\text{e}}\,,\ \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{\text{кy}}^{\text{e}}\,,\ \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{\text{кz}}^{\text{e}} \qquad (89^*)$$

В интегральной форме выражение теоремы будет:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \overline{F}_к^{\,e} dt \qquad (90)$$

или

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_к^{\,e} \qquad (91)$$

В проекциях на координатные оси будет:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_{0x} = \sum \overline{S}_{кx}^{\,e}\,,\ \overline{Q}_1 - \overline{Q}_{0y} = \sum \overline{S}_{y}^{\,e}\,,\ \overline{Q}_1 - \overline{Q}_{0z} = \sum \overline{S}_{z}^{\,e}$$

Задача. Тяжелое тело (рис.169) спускается вниз по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость $f = 0.2$. Через какой промежуток времени скорость груза утроится, если в начальный момент скорость груза равнялась $\upsilon_0 = 0.5$м/с .

Решение. Применим теорему в форме:

$$m\overline{\upsilon} - m\overline{\upsilon}_0 = \overline{S}$$ или в проекциях на ось x:

$$m\upsilon_x = m\upsilon_{0x} = \sum S_x(\overline{F}_к)$$

Изобразим силы, приложенные к грузу:

$\overline{P} = m\overline{g}$ - сила тяжести груза,

$\overline{N}$ - нормальная реакция плоскости,

$F_{тр} = fN$ - сила трения,

где сила $N = P \cdot \cos\alpha = mg\cos\alpha$

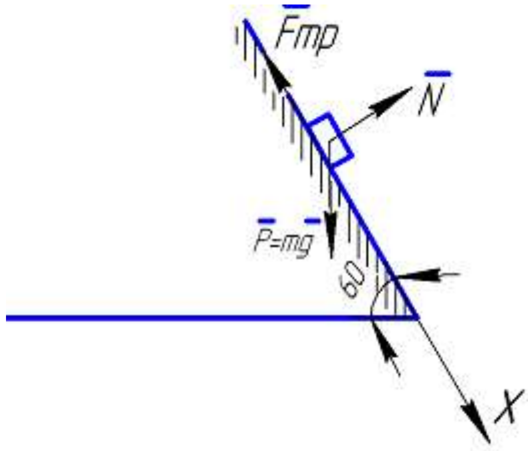


Рис.169

Согласно условию задачи $\upsilon_x = 3\upsilon_{0x} = 1.5$м/с

Все силы, приложенные к телу постоянны, поэтому

$$\sum S_x(\overline{F}_к) = \sum F_{кх}\Delta t = (mg\sin\alpha - F_{тр})\Delta t = (mg\sin\alpha - fN)\Delta t = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\Delta t$$

где Δt - искомый промежуток времени. Тогда:

$$3m\upsilon_0 - m\upsilon_0 = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\Delta t$$

Откуда:

$$\Delta t = \frac{2\upsilon_0}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$$

Подставив заданные значения величин, получим:

$$\Delta t = 0.13\text{с}$$

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить два следствия:

1. Если $\sum \overline{F}_к^е = 0$, т.е. сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то из уравнения (89) следует, что:

$$\overline{Q} = const$$

Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

2. Если $\sum \overline{F}_{кх}^{е} = 0$, то $\overline{Q}_x = const$, т.е. сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

Эти следствия выражают закон сохранения количества движения системы.

5.9 Теорема об изменении главного вектора количеств движения в приложении к сплошным средам (теорема Эйлера)

Рассмотрим установившееся течение жидкости, т.е. это когда в каждой точке объема, занятой жидкостью, скорости $\overline{\upsilon}$ её частиц, давление P и плотность ρ не изменяются со временем.

Тогда через любое поперечное сечение трубы с площадью S за 1 с будет протекать одно и тоже количество массы жидкости:

$$M_c = \rho S \upsilon \tag{92}$$

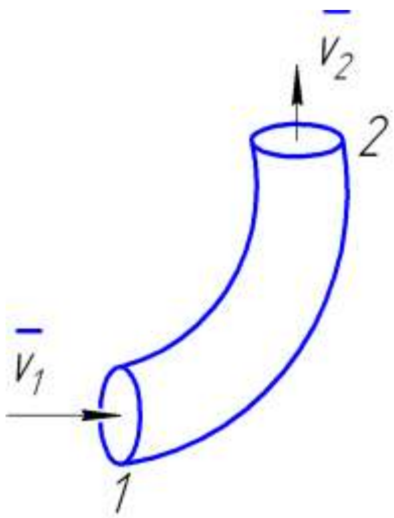


Рис.170

где υ - средняя скорость жидкости в данном сечении;

M_c - секундный массовый расход жидкости

Тогда теорема об изменении количества движения жидкости (или газа) для объёма жидкости ограниченной сечениями 1 и 2 (рис.170) будет:

$$M_c(\overline{\upsilon}_2 - \overline{\upsilon}_1) = \sum \overline{F}_к^e \tag{93}$$

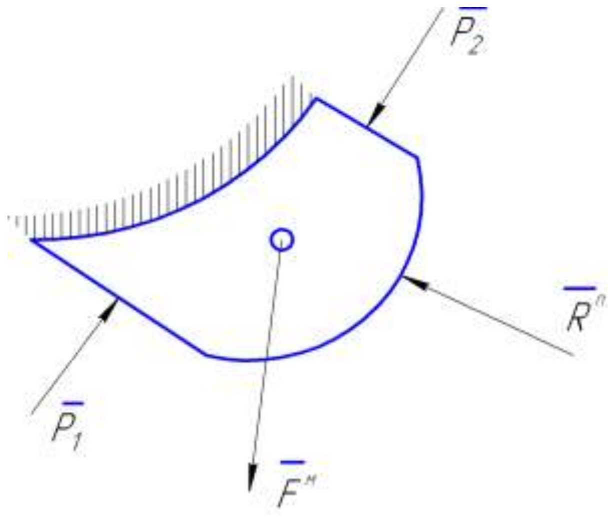


Рис.171

Величина $M_c\upsilon$ называется секундным количеством движения жидкости.

Если разделить в трубе, действующие внешние силы на главный вектор сил тяжести $\overline{F}^{\text{м}}$ и главные векторы поверхностных сил (рис. 171):

$R^{\text{п}}$ - реакции трубы; $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ - силы давления в сечениях 1 и 2 со стороны жидкости.

где $P_1 = \rho_1 S_1$, $P_2 = \rho_2 S_2$.

Тогда уравнение: $M_c(\overline{\upsilon}_2 - \overline{\upsilon}_1) = \sum \overline{F}_к^e$ можно представить в виде:

$$M_c(\overline{\upsilon}_2 - \overline{\upsilon}_1) = \overline{F}^{\text{м}} + \overline{R}^{\text{п}} + \overline{P}_1 + \overline{P}_2 \qquad (94)$$

Это равенство выражает теорему Эйлера.

5.10 Тело переменной массы. Движение ракеты

Рассмотрим случаи, когда процесс отделения или присоединение к телу частиц будет непрерывным.

Тело, масса M которого непрерывно меняется с течением времени, называется телом переменной массы. Тогда:

$$M = F(t)$$

где $F(t)$ - непрерывная функция времени.

Найдем уравнение движения ракеты, считая её точкой переменно массы. Считаем:

$\overline{U}$ - относительная скорость истечения продуктов горения из ракеты (рис.172);

μ - масса отделяющейся частицы, где $\mu = |dM| = -dM$, т.к. M – величина убывающая.

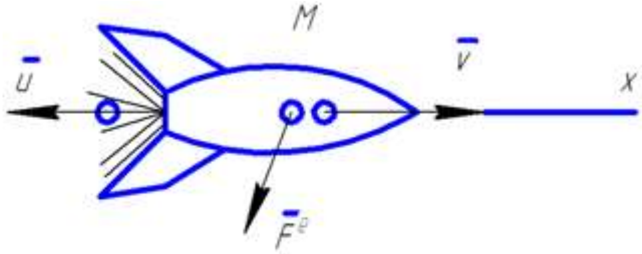


Рис.172

Тогда уравнение (89) можно представить:

$$d\overline{Q} = \overline{F}^{e} dt \tag{95}$$

Если скорость υ ракеты за время dt изменяетя на величину $d\overline{\upsilon}$, то приращение количества движения будет $Md\overline{\upsilon}$. У частицы в момент $t + dt$ приращение количества движения будет $\mu(\overline{\upsilon} + \overline{\mathrm{U}})$. За время dt количество движения частицы изменяется на величину $\overline{U}\mu = -\overline{U}dM$, а для всей системы получится:

$d\overline{Q} = Md\overline{\upsilon} - \overline{u}dM$, подставив это в (95), получим:

$$M\frac{d\overline{\upsilon}}{dt} = \overline{F}^{e} + \overline{u}\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dt}} \tag{96}$$

Уравнение (96) есть уравнение движения точки переменной массы в дифференциальной форме (уравнение Мещерского)

Здесь $\overline{U}\dfrac{dM}{dt} = \overline{\Phi}$ - реактивная сила.

Так как $\dfrac{dM}{dt} = -M_c$, то $\overline{\Phi} = -\overline{u}M_c$, т.е. реактивная сила равна произведению секундного расхода массы топлива на относительную скорость истечения продуктов его сгорания и направлена противоположно этой скорости.

Если рассмотреть движение ракеты только под действием одной реактивной силы, считая $F^{e}=0$, а относительную скорость постоянной, то уравнение (96) примет вид:

$$d\upsilon=-u\frac{dM}{dt}$$

Интегрируя, получим:

$$\upsilon=\upsilon_0+u\ln\frac{M_0}{M} \qquad (97)$$

Если обозначить массу корпуса ракеты и все оборудование через M_K, а всю массу топлива через M_T. Тогда, очевидно, что вся масса

$$M_0=M_K+M_T$$

Подставив эти значения в формулу (97), получим:

$$\upsilon=\upsilon_0+u\ln(1+\frac{\mathrm{M_T}}{\mathrm{M_K}}) \qquad (98)$$

Это есть формула Циолковского, которая определяет скорость ракеты, когда всё её топливо израсходовано.

5.11 Теорема об изменении момента количеств движения системы

Главным моментом количеств движения (или кинетическим моментом) системы относительно данного центра O называется величина $\overline{K}_0$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек систем относительно этого центра:

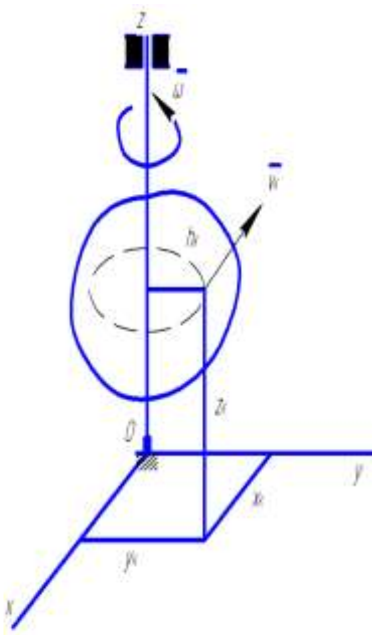
$$\overline{K}_0=\sum\overline{m}_0(m_к\overline{\upsilon}_к) \qquad (99)$$

Относительно координатных осей будет:

$$K_x = \sum m_{\text{x}}(m_{\text{к}}\bar{\upsilon}_{\kappa}), \qquad K_y = \sum m_{\text{y}}(m_{\text{к}}\bar{\upsilon}_{\kappa}), \qquad K_z = \sum m_{\text{z}}(m_{\text{к}}\bar{\upsilon}_{\kappa}) \tag{100}$$

1. Кинетический момент вращающегося тела:

$$\kappa_{\text{z}} = J_{\text{z}} \cdot \omega \tag{101}$$



где J_z - момент инерции твердого тела относительно оси z.

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела (рис.173).

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то

$$K_z = J_{1\text{z}}\omega_1 + J_{2\text{z}}\omega_2 + \ldots \text{J}_{\text{nz}}\omega_n$$

Рис.173

Выражение:

$$\frac{d\text{K}_0}{\text{dt}} = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}}) \tag{102}$$

выражает суть теоремы об изменении момента количества движения системы: производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части уравнения (102) на неподвижные оси *Oxyz*, получим:

$$\frac{d\text{K}_{\text{x}}}{\text{dt}} = \sum m_x(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}}), \ \frac{d\text{K}_{\text{y}}}{\text{dt}} = \sum m_y(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}}), \ \frac{d\text{K}_{\text{z}}}{\text{dt}} = \sum m_z(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}}) \tag{103}$$

Уравнения (103) выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

Теорема моментов относительно центра масс имеет вид:

$$\frac{d\overline{\text{K}}_c}{\text{dt}} = \sum \overline{m}_c(\overline{F}_\text{к}^\text{e}) \qquad (104)$$

Из теоремы моментов вытекают следствия:

1. Если $\sum \overline{m}_0(\overline{F}_\text{к}^\text{e}) = 0$, $\overline{K}_0 = const$

Если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен.

2. Если $\sum m_z(\overline{F}_\text{к}^\text{e}) = 0$, $K_z = const$

Если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.

Эти результаты выражают собой закон сохранения главного момента количеств движения системы.

Для случая вращающейся системы вокруг неподвижной оси z (или проходящей через центр масс) при $\sum m_z(\overline{F}_\text{к}^\text{e}) = 0$ получим: $J_z\omega = const$.

Отсюда следуют выводы:

а) если система неизменяема, то под действием внутренних сил можно изменить угловую скорость, а значит и момент инерции. При этом будет выполняться условие: $Y_z\omega = const$

Задача. На барабан весом *G=100 Н* и радиусом *R=0.2 м* намотан трос к которому подсоединен груз *В* весом $Q = 1000\text{Н}$ (рис.174).

Определить угловое ускорение барабана ε, если на барабан действует постоянный момент сил трения $m_\text{тр} = 5H \cdot м$ и радиус инерции барабана $\rho = 0{,}1 м$. Весом троса пренебречь.

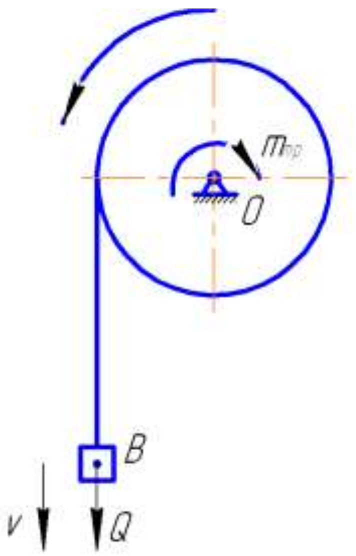


Рис.174

Решение.

Воспользуемся теоремой моментов относительно оси *O*:

$$\frac{dК_0}{dt} = \sum m_0(\overline{F}_к^е) \qquad (а)$$

Так как в систему входят два тела, то:

$$K_0 = K_0^{бар} + K_0^{гр}$$

Груз *B* движется поступательно со скоростью $\upsilon = \omega \cdot R$, а момент инерции барабана $J_0 = \frac{G}{q} \cdot \rho^2$. Тогда

$K_0^{гр} = \frac{Q}{q} \cdot \upsilon R$, $K_0^{бар} = \frac{G}{q} \cdot \rho^2 \omega$ и

$$K_0 = \frac{\omega(QR^2 + G\rho^2)}{q}.$$

Определяя моменты сил, получим:

$$\sum m_0(\overline{F}_к^е) = Q \cdot R - m_{тр}$$

Подставляя все это в равенство (а), получим:

$$\frac{QR^2 + G\rho^2}{q} \cdot \frac{d\omega}{dt} = QR - m_{тр}$$, отсюда:

$$\varepsilon = \frac{(QR - m_{тр})q}{QR^2 + G\rho^2}$$

Подставив численные значения заданных величин, получим:

$$\varepsilon = 3.7 \frac{рад}{с^2}$$

6 ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Пусть на твердое тело, имеющее неподвижную ось *z* вращения, действует система сил (рис.175)

$$\overline{F}_1^{\text{e}},\ \overline{F}_2^{\text{e}},\ \ldots,\ \overline{F}_n^{\text{e}}$$

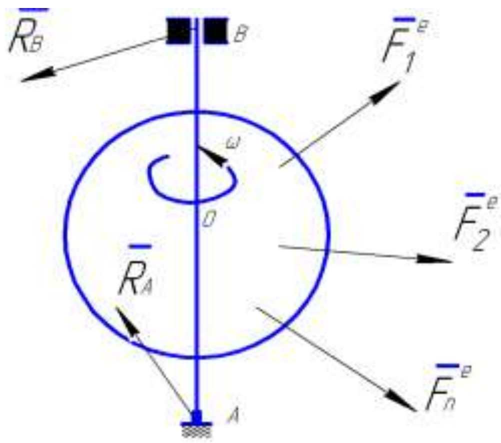


Рис.175

Составим уравнение движения тела, включая силы реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$.

$\frac{d\text{К}_z}{\text{ве}} = M_z$, где $M_z = \sum m_z(\overline{F}_\text{к}^{\text{e}})$,

где M_z - вращающийся момент. Так как $\text{К}_z = J_z\omega$, то

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z \text{ или } J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z$$

Уравнение (105) есть дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.

Произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно вращающему моменту:

$$J_z \cdot \varepsilon = M_z \qquad (105^*)$$

Из этих уравнений видно, что при данном M_z, чем больше момент инерции тела, тем меньше угловое ускорение, и наоборот. Следовательно, момент инерции тела действительно играет при вращательном движении такую же роль, как масса при поступательном, т.е. является мерой инертности тела при вращательном движении.

В частных случаях будет:

1. если $M_z = 0$, то $\omega = const$, т.е. тело вращается равномерно;

2. если $M_z = const$, то и $\varepsilon = const$, тогда тело вращается равномерно;

Задача. Колесо массой *m=120 кг* вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью $\omega_0 = 10 рад/с$. Через сколько секунд колесо остановится, если тормозная колодка прижимается к колесу (рис. 176) с силой $\mathrm{N} = 80\mathrm{Н}$. Радиус колеса $R = 0.3\text{м}$/ Коэффициент трения колодки о колесо $f = 0.6$.

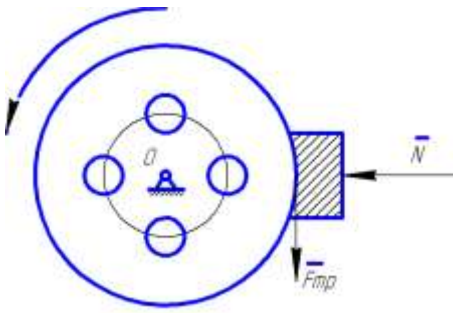
Тогда интегрируя выражение (а), находим:

$$J_0\omega = -fNRt + c_1 \text{ (б)}$$

Зная печальные условия $t = 0$, $\omega = \omega_0 = 10\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Определяем постоянную интегрирования c_1:

$c_1 = Y_0\omega_0$.



Учитывая, что для обода колеса (кольца) $J_0 = mR^2$

получим $t = \dfrac{J_0\omega_0}{fNR} = \dfrac{mR\omega_0}{fN}$ (в)

Подставив в (в) числовые значения, получим

Рис.176

$t = 7.5c$.

6.2 Физический маятник

Физическим маятником (рис.177) называется твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести. Введем обозначения:

$oc = l$ - расстояние от центра масс до оси вращения,

P - вес маятника;

J_0 - момент инерции маятника относительно оси подвеса,.

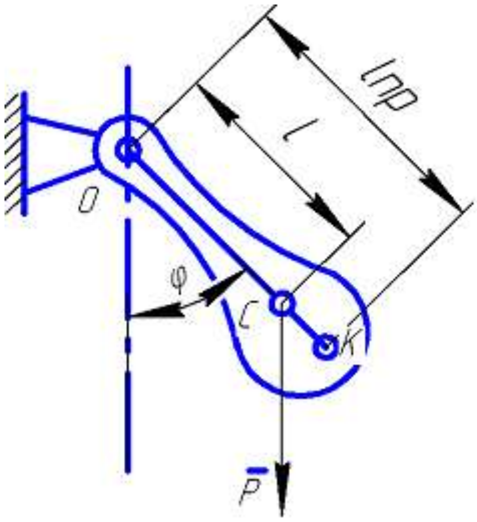


Рис.177

Положение маятника будем определять углом отклонения φ. Чтобы установить закон движения маятника воспользуемся дифференциальным уравнением вращательного движения:

$$J_0\ddot{\varphi} = M_0$$

В нашем случае $M_0 = -Pl\sin\varphi$. Тогда уравнение примет вид:

$$J_0\ddot{\varphi} = -Pl\sin\varphi$$

Разделив обе части уравнения на $J_0 \neq 0$, получим:

$$\ddot{\phi} = \frac{-Pl}{J_0}\sin\phi\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Введем обозначение $\frac{Pl}{J_0} = k^2$. Тогда уравнение колебания маятника будет:

$$\ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0$$

Полученное дифференциальное уравнение в обычных функциях не интегрируется. Рассмотрим только малые колебания маятника, когда $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

Общим решением этого уравнения будет:

$$\varphi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$

Используя начальные условия $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega_0 = 0$ - отпущен без начальной скорости, определяем постоянные интегрирования $C_1 = 0$, $C_2 = \varphi_0$.

Тогда закон малых колебаний маятника будет:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt,$$

где период гармонических колебаний будет:

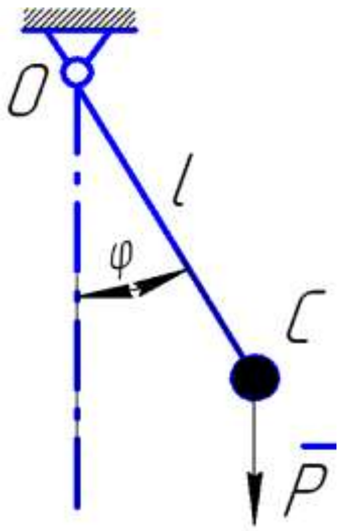
$$\mathrm{T}_{\text{физ}} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\rho l}} \qquad (106)$$

Из формулы (106) видно, что период малых колебаний от угла φ не зависит. На самом деле этот результат приближенный. Если проинтегрировать уравнение $\ddot{\varphi} + k^2 \sin\varphi = 0$ (угол φ любой по величине), то убеждаемся, что период $\mathrm{T}_{\text{физ}}$ зависит от φ_0. Приближенно эта зависимость будет:

$$\mathrm{T}_{\text{физ}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\rho l(1 + \frac{\varphi_0^2}{16})}}$$

Если угол отклонения φ_0 принять, например, $\varphi_0 = 0.4$рад ($\varphi_0 \approx 23^0$) формула (106) дает погрешность до 1 %.

Полученные результаты применимы и для математического маятника, который представляет систему, состоящую из одной материальной точки (рис.178).



$$J_0 = ml^2 = -\frac{P}{g}l^2$$

Период колебаний математического маятника:

$$\text{Т}_{\text{мат}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (107)$$

Сравнивая формулы (106) и (107) получаем:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J_0 g}{Pl} = \frac{J_0}{Ml} \quad (108)$$

Рис.178

Т.е. периоды колебаний физического и математического маятника совпадают.

Длина $l_{\text{пр}}$ (рис. 50), при которой периоды колебаний физического и математического маятника совпадают, называется *приведенной длиной физического маятника.* Точка *К*, расположенная от оси подвеса на расстоянии $ок = l_{\text{пр}}$ называется *центром качания физического маятника*.

Согласно теореме Гюйгенса: $J_0 = J_c + Ml^2$ можно формулу (108) привести к виду:

$$l_{\text{пр}} = l + \frac{J_c}{Ml} \quad (108^*)$$

Отсюда следует, что *ОК* всегда больше *ОС*=*l*, т.е центр качаний маятника всегда расположен ниже его центра масс.

Из формулы (108^*) следует, что:

$l_{\text{пр}} = KC + \frac{J_c}{M \cdot KC} = \frac{J_c}{Ml} + l = l_{\text{пр}}$, т.е. точки *К* и *О* являются взаимными.

Если ось подвеса будет проходить через точку *К*, то центром качаний будет точка *О*, и период колебаний маятника не изменится. Это свойство используется в оборотном маятнике, который служит для определения ускорения силы тяжести.

6.3 Плоскопараллельное движение твердого тела

Если тело совершает плоскопараллельное движение, то его положение определяется положением полюса и углом поворота вокруг полюса. При решении задач удобнее всего за полюс принимать центр масс C тела (рис. 54) и определять положение тела координатами x_c, y_c и углом поворота φ.

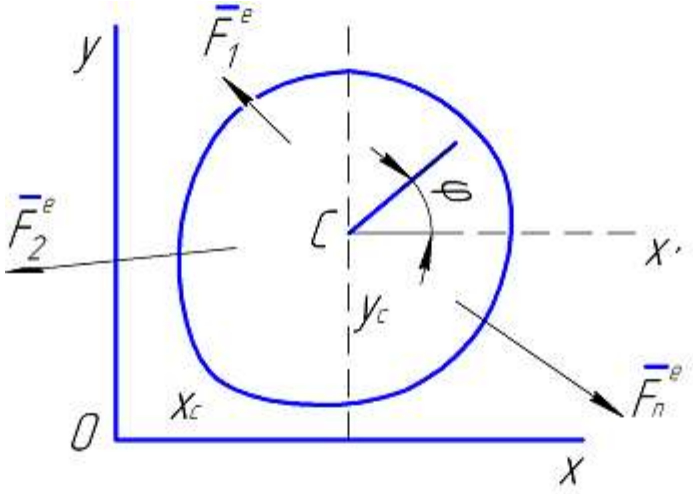


Рис.179

Пусть на рис. 179 изображено сечение тела плоскостью, параллельной плоскости движения и проходящей через центр масс C.

Тогда уравнение движения точки C будет:

$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_к^е \tag{109}$$

а вращательное движение вокруг центра C будет определяться уравнением:

$$J_c \cdot \varepsilon = \sum m_c(\bar{F}_к^e) \tag{110}$$

В дифференциальной форме уравнениями движения будет:

$$M\ddot{x}_c = \sum F_{кx}^е\ ,\ M\ddot{y}_c = \sum F_{кy}^е\ ,\ J_c\ddot{\varphi} = \sum m_c(\bar{F}_к^е) \tag{111}$$

При несвободном движении, когда траектория центра масс известна, уравнения движения точки *C* удобно составлять в проекциях на касательную τ и главную нормаль *n*
к этой траектории.

Тогда получим:

$$M\frac{d\upsilon_c}{dt} = \sum F^{\mathrm{e}}_{\text{к}\tau}\ ,\ M\frac{\upsilon_c^2}{\rho_c} = \sum F^{\mathrm{e}}_{\text{кп}}\ ,\ J_c\ddot{\varphi} = \sum m_c(\overline{\mathrm{F}}^{\mathrm{e}}_{\text{к}}) \qquad (112)$$

где ρ_c - радиус кривизны траектории центра масс.

Надо иметь в виду, что если движение несвободное, то в правые части уравнений (111) и (112) войдут ещё неизвестные реакции связей.

Задача. Колесо (сплошной однородный диск) массы *M*=100 кг и радиуса *r*=0,5 м катится без скольжения по горизонтальной прямой под действием горизонтальной силы $\overline{T}$, приложенной к центру *C* колеса. Закон движения центра *C*: $x_c = 2t^2$. Определить модуль силы $\overline{T}$, силу трения $\overline{F}_{\text{тр}}$ и нормальную реакцию $\overline{N}$.

Решение. Приложим к колесу внешние силы (рис. 180).

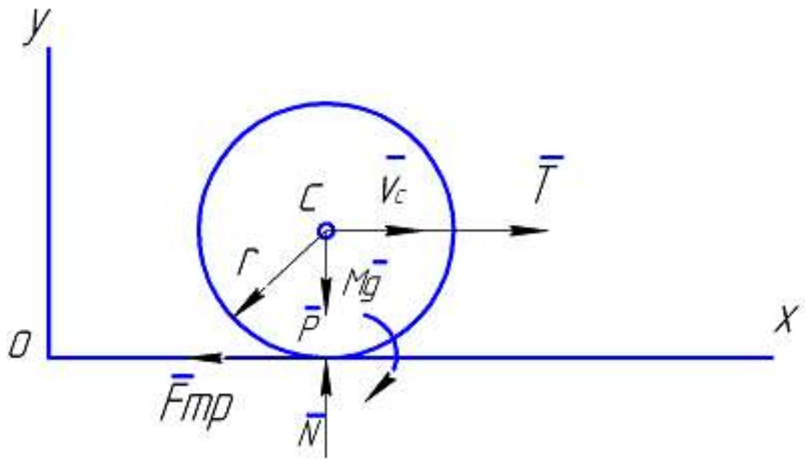


Рис.180

$M\overline{g}$ - сила тяжести, $\overline{T}$ - движущаяся сила, $\overline{N}$ - нормальная реакция плоскости, $\overline{F}_{тр}$ - сила трения.

Составим дифференциальные уравнения движения колеса:

$$M\ddot{x}_c = T - F_{тр},$$

$$M\ddot{y}_c = N - Mg$$

$$J_c\ddot{\varphi} = F_{тр} \cdot r$$

где $J_c = \dfrac{Mr^2}{2}$. При движении колеса вдоль оси x $y_c = r$ постоянно. Тогда $\ddot{y}_c = 0$ и *N=Mg,*

N=980 Н/

Точка *P*- это мгновенный центр скоростей. Тогда $\upsilon_c = r\omega$ или $\dot{x}_c = r\dot{\varphi}$

Тогда ускорение равно $\ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$

По условию задачи $x_c = 2t^2$, а $\ddot{x}_c = 4$ м/с^2

Из формулы (3) следует, что:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_c}{r} = 8\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Из третьего уравнения формулы (1) следует:

$$F_{тр} = \frac{J_c \cdot \ddot{\varphi}}{r}.$$

Подставив заданные значения, получим: $F_{тр} = 200$ Н.

Из первого уравнения системы (1) определяем Т. $T = M \cdot \ddot{x}_c + F_{тр}$ =600 Н.

6.4 Теория гироскопов

1 Гироскоп с тремя степенями свободы

Гироскопом (рис.181) называется симметричное твердое тело, угловая скорость ϖ вращения, которого вокруг оси симметрии значительно превосходит по модулю угловую скорость ϖ_1 вращения самой оси симметрии:

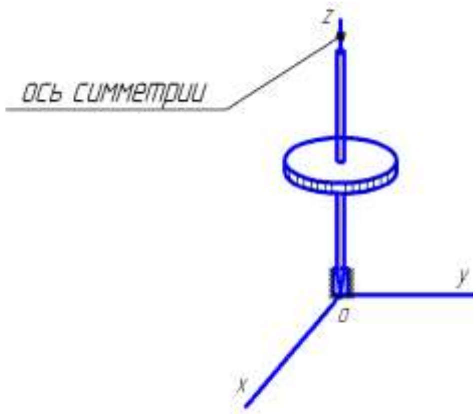


Рис. 181

$$\omega >> \omega_1$$

В современных гироскопических приборах угловая скорость ϖ собственного вращения достигает иногда 50000 об/мин.

Выберем начало координат в точке *O*. Ось *z* – ось симметрии гироскопа (рис. 56), то оси *x, y, z* будут главными осями инерции гироскопа в неподвижной точке *O*.

Момент инерции J является полярным моментом инерции гироскопа.

$J_x = J_y$ - экваториальные моменты инерции.

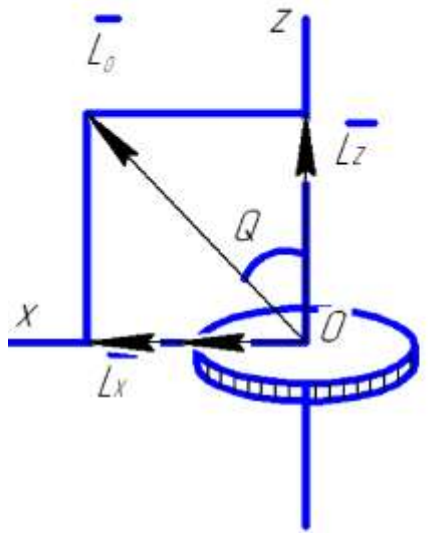
Если гироскоп вращается с угловой скоростью ϖ вокруг оси симметрии, которая в свою очередь вращается вокруг неподвижной точки с угловой скоростью ϖ_1 (рис. 57). Тогда в связи с теоремой о сложении вращений:

$$\varpi_a = \varpi_1 + \varpi \qquad (113)$$

Для простоты возьмём:

$$\varpi_1 \perp \varpi \quad \text{(рис.182)}$$

Главный момент количества движения $\overline{L}_0 = \overline{L}_z + \overline{L}_x$.



Модули $L_z = J_z\omega$, $L_x = J_x\omega_1$

$tg\theta = \dfrac{J_x\omega_1}{J_z\omega}$, Поскольку $\omega_1 << \omega$, то угол θ очень мал (в современных приборах он составляет доли секунды), и можно считать, что вектор $\bar{L}_0$ совпадает с осью гироскопа, т.е.

$\bar{L}_0 = \bar{L}_z = J_z \cdot \bar{\omega}$.

Рис.182

На этом допущении основана приближенная (элементарная) теория гироскопов.

При решении задач с помощью приближенной теории гироскопа удобно пользоваться теоремой Резаля (рис. 183).

$$\bar{\upsilon} = \frac{dL_0}{dt}, \text{ а } \frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^e \qquad \text{так как } \bar{\upsilon} = \bar{M}_0^e, \tag{114}$$

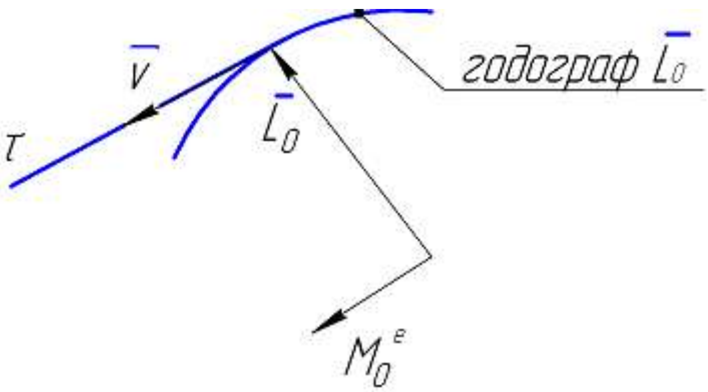


Рис.183

Скорость $\bar{\upsilon}$ конца $\bar{L}_0$ направлена по касательной к горографу $\bar{L}_0$ в соответствующей точке.

Равенство (114) выражает теорему Резаля: скорость конца вектора кинетического момента тела относительно центра *O* равняется по модулю и по направлению главному моменту внешних сил относительно того же центра.

Если на гироскоп действуют внешние силы, главный момент которых равен $\overline{M}_0^e$, то ось гироскопа перемещается (прецессирует) в пространстве по направлению вектора $\overline{M}_0^e$.

Аналогичный результат будет при действии на ось гироскопа пары сил.

Угловая скорость прецессии ϖ_1 определяется с помощью теоремы Резаля по формуле:

$$\omega_1 = \frac{M_0^e}{\mathrm{J}_z \omega \cdot \sin\alpha} \tag{115}$$

где угол α - угол между осью гироскопа и вектором угловой скорости ϖ_1 прецессии.

Равенство (115) и теорема Резаля определяют закон прецессии оси гироскопа.

Из равенства (114) следует, что если действие силы прекращается, то $\overline{M}_0^e = 0$ и тогда $\overline{\upsilon} = 0$ и ось гироскопа останавливается.

Если действие силы является кратковременным (толчок), то ось гироскопа совершает высокочастотные колебания малой амплитуды и при наличии сопротивления затухают и ось занимает положение близкое к начальному.

2 Гироскопический момент

Гироскопический момент, создающий динамическое давление на опоры, возникает при изменении направления оси симметрии и определяется равенством:

$$\overline{M}_0^{\text{гир}} = J_z \varpi \text{x} \varpi_1 \tag{116}$$

По модулю гироскопический момент равен:

$$M_0^{\text{гир}} = J_z \omega \omega_1 \sin\alpha \tag{117}$$

где α - угол между векторами ϖ и ϖ_1;

J_z - момент инерции гироскопа относительно оси симметрии;

ω - угловая скорость собственного вращения;

ω_1 - угловая скорость прецессии оси гироскопа.

Гироскопический момент $\overline{M}_0^{гир}$ стремится совместить ось гироскопа (вектор ϖ) с осью прецессии (вектор ϖ_1) посредством поворота ϖ к ϖ_1 (рис. 184).

Если расстояние между опорами равно *H*, то модули гироскопических давлений $\overline{N}^{гир}$ определяются по формуле:

$$N^{\text{гир}} = \frac{M_0^{гир}}{H} = \frac{J_z \omega \omega_1 \sin\alpha}{H} \tag{118}$$

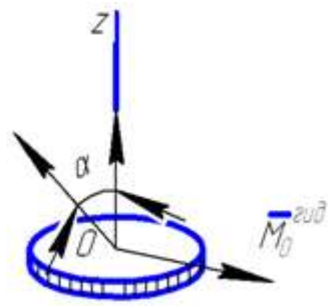


Рис.184

Главный момент внешних сил $\overline{M}_0^e$ определяется равенством:

$$\overline{M}_0^e = -\overline{M}_0^{гир} = \varpi_1 \times J_z \varpi \tag{119}$$

Модули главного момента внешних сил и гироскопического момента равны.

Главный момент внешних сил $\overline{M}_0^e$ создает гироскопические (динамические) реакции опор $\overline{R}^{\text{гир}}$, причем:

$$\overline{R}^{\text{гир}} = -\overline{N}^{\text{гир}} \qquad (120)$$

Поэтому по модулю

$$\overline{R}^{\text{гир}} = \frac{J_z \omega \omega_1 \sin\alpha}{H} \qquad (121)$$

Задача. Определить максимальное значение добавочного давления на подшипники ротора электромотора вследствие качки судна, если ось вращения ротора перпендикулярна к продольной оси качающегося судна (рис. 185), максимальный угол γ_0 качания судна равен 17^0. Угол качания γ изменяется по закону $\gamma = \gamma_0 \cos\rho t$. Период качания инерции ротора $Y_z = 80 \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Расстояние между подшипниками $l = 1\text{м}$.

Решение. Построим вектор $\overline{K}_c = \bar{c}A$ кинетического момента ротора. Он направлен по оси *Z* и равен:

$$K_c = J_z \omega = J_z \frac{\pi n}{30}.$$

При боковой качки судна конец *A* вектора $\overline{K}_c$ будет описывать окружность со скоростью $\bar{\upsilon}$, которая равна:

$$\upsilon = cA\gamma = J_z \frac{\pi n}{30}(-\gamma_0 \rho \sin\rho t)$$

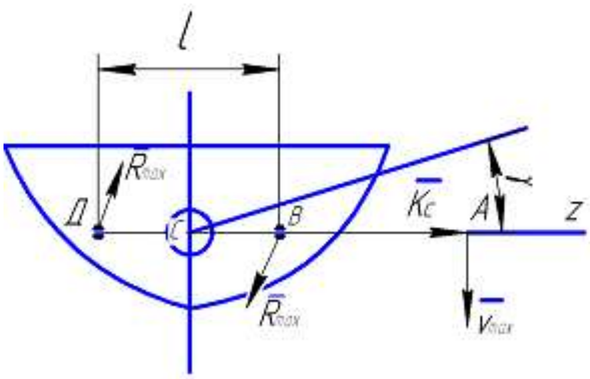


Рис.185

Максимальное значение скорости равно:

$$\upsilon_{\max} = J_z \frac{\pi n}{30} \gamma_0 \rho ,$$

где $\sin \rho t = 1$, $\cos \rho t = 0$, $\gamma = 0$, т.е. $\bar{\upsilon}_{\max}$ направлена вертикально. Согласно теореме Резаля так же будет направлен момент $\bar{M}_c^e$ пары, составленный реакциями $\bar{R}_{\max}$ подшипников. Тогда максимальные дополнительные реакции $\bar{R}_{\max}$ лежат в горизонтальной плоскости. Величину $\bar{R}_{\max}$ можно найти из равенства:

$$\upsilon_{\max} = M_c^e \text{ или } J_z \frac{\pi n}{30} \gamma_0 \rho = R_{\max} l \text{, отсюда}$$

$$R_{\max} = \frac{J_z \pi n \gamma_0 \rho}{30 l}$$

где частота $\rho = \dfrac{2\pi}{T}$. Подставив известные значения, получим:

$$R_{\max} = 1212 H$$

7 ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

7.1 Кинетическая энергия системы

Кинетической энергией системы называется скалярная величина *T*, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum \frac{m_к \upsilon_к^2}{2} \tag{122}$$

Кинетическая энергия является величиной положительной и характеризует как поступательное так и вращательное движение системы.

1. Поступательное движение

$$T_{пост} = \frac{M \upsilon_c^2}{2} \tag{123}$$

Кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс

2. Вращательное движение

$$T_{вр} = \frac{J_z \omega^2}{2} \tag{124}$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

3. Плоскопараллельное движение

$$T_{плоск} = \frac{M\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} \tag{125}$$

При плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.

4. Общий случай движения

$$T = \frac{M\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} \tag{126}$$

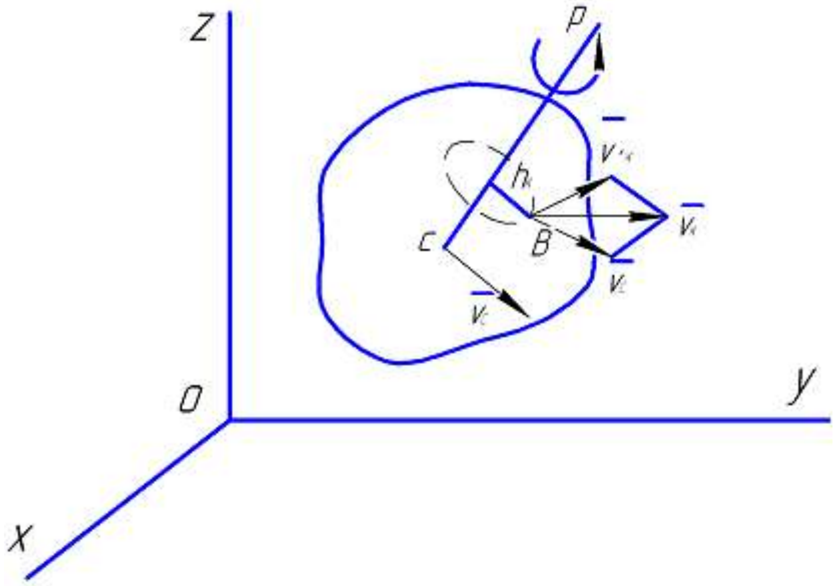


Рис.186

Кинетическая энергия в общем случае движения (рис.186) равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

7.2 Вычисления работы

1. Работа сил тяжести, действующих на систему:

$$A = \pm P \cdot h_c \tag{127}$$

где P- вес системы, h_c - вертикальное перемещение центра масс

2. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу:

$$dA = M_z d\varphi \tag{128}$$

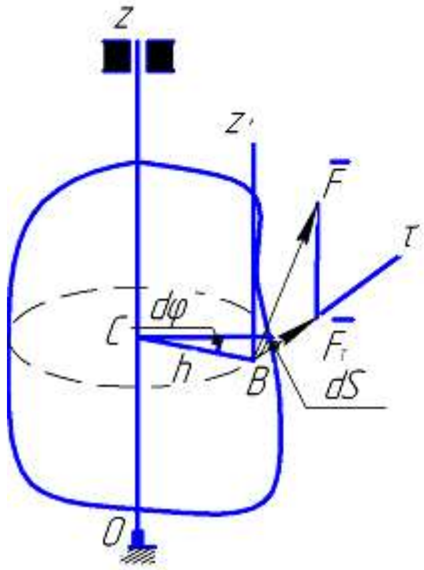


Рис.187

Элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота (рис. 187).

При повороте на конечный угол φ_1 работа:

$$A=\int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi \tag{129}$$

В случае постоянного момента:

$$A=M_z\varphi_1 \tag{130}$$

Мощность определяется:

$$N=\frac{dA}{dt}=M_z\cdot\frac{d\varphi}{dt}=M_z\omega \tag{131}$$

При этой же самой мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.

3. Работа сил трения, действующих на катящееся тело.

На колесо радиусом R (рис. 188), катящееся без скольжения, действует сила трения $\overline{F}_{тр}$, приложенная в точке B. Элементарная работа этой силы равна нулю $dA = 0$, так как точка B совпадает с мгновенным центром скоростей, т.е. $\upsilon_{в} = 0$. $dA = F_{тр} dS_{в}$, где $dS_{в} = 0$ и тогда $dA = 0$.

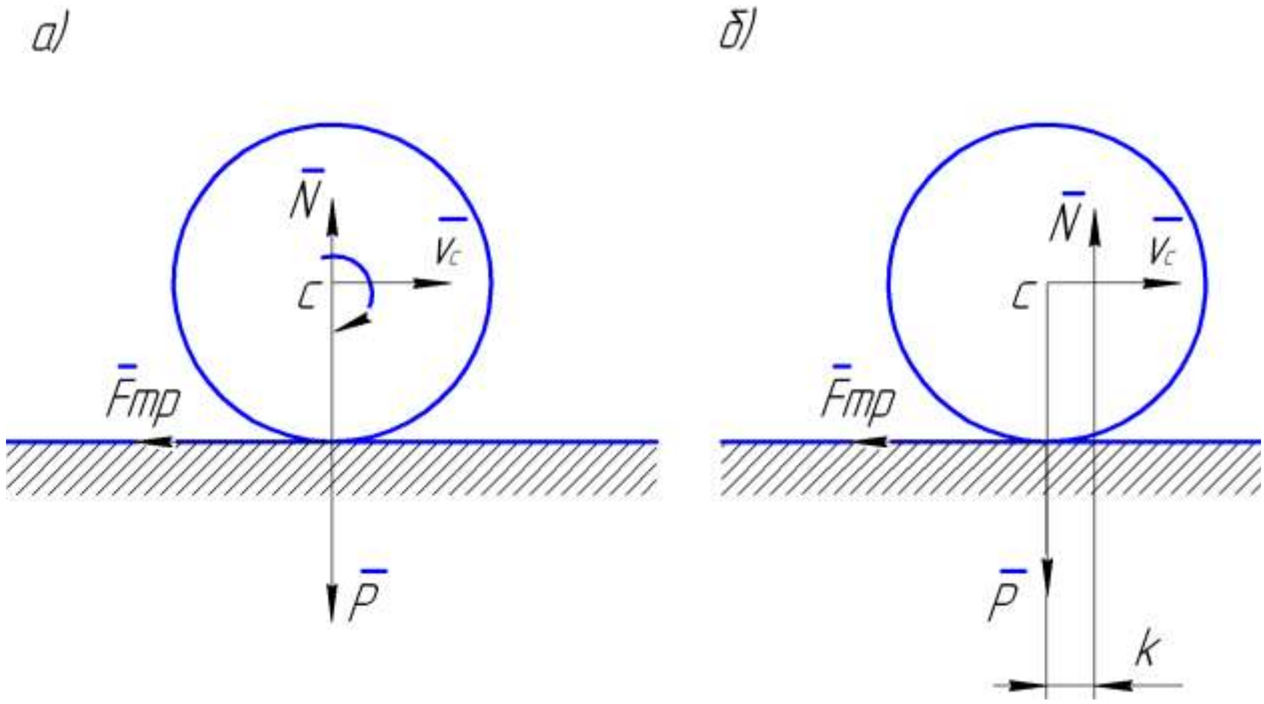


Рис. 188

По этой же самой причине равна нулю и работа нормальной реакции.

При качении колеса вследствие деформации поверхностей (рис. 63, б) возникает сопротивление качения парой сил $\overline{N}$, $\overline{P}$, момент которой $M = kN$, где k - коэффициент трения качения.

Учитывая, что при качении угол поворота колеса:

$$d\varphi = \frac{dS_c}{R}, \text{ получим:}$$

$$dA^{кач} = -kNd\varphi = -\frac{k}{R} NdS_c \qquad (132)$$

Если $N = const$, то полная работа сил сопротивления качению:

$$A^{кач} = -kN\varphi = -\frac{k}{R} NS_c \qquad (133)$$

7.3 Теорема об изменении кинетической энергии системы

Для любой точки системы с массой $m_к$, имеющую скорость $\upsilon_к$ имеем:

$$d\left(\frac{\sum m_к \upsilon_к^2}{2}\right) = \sum dA_к^e + \sum dA_к^i$$

Составив такие уравнения для каждой точки системы и сложив их почленно, получим:

$$dT = \sum dA_к^e + \sum dA_к^i \qquad (134)$$

Это выражение (134) есть теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.

Проинтегрировав выражение (134) по перемещению системы из начального положения в конечное, получим:

$$T - T_0 = \sum dA_к^e + \sum dA_к^i \qquad (135)$$

Это есть теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме: изменение кинетической энергии системы на некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

В случае <u>неизменяемой</u> системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю и уравнения (134) и (135) примут вид:

$$dT = \sum dA_к^e \,,\; T - T_0 = \sum A_к^e \qquad (136)$$

Неименяемой будет называться механическая система, в которой расстояние между каждыми двумя взаимодействующими точками остается во все время движения постоянным.

В случае системы с идеальными связями (не изменяющиеся со временем) представим действие всех внешних и внутренних сил как активных и реакций связей. Тогда уравнения (134) можно представить в виде:

$$dT = \sum dA_{\text{к}}^{\text{а}} + \sum dA_{\text{к}}^{r} \tag{137}$$

где $dA_{\text{к}}^{\text{а}}$ - элементарная работа действующих на *k*- точку системы внешних и внутренних активных сил;

$dA_{\text{к}}^{r}$ - элементарная работа реакций;

Если выполняется условие:

$$\sum dA_{\text{к}}^{r} = 0 \tag{138}$$

Т.е. при наличии связей не влияет на изменение кинетической энергии, то такие связи и механические системы являются идеальными. Тогда для таких идеальных механических систем и связей, которые не изменяются со временем, будет:

$$dT = \sum dA_{\text{к}}^{\text{а}} \text{ и } T - T_0 = \sum dA_{\text{к}}^{\text{а}} \tag{139}$$

Изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями при любом её перемещении равно сумме работ на этом перемещении приложенных к системе внешних и внутренних активных сил.

Значимость и практическая ценность теоремы с идеальными связями заключается в том, что можно исключать из уравнения движения все наперед неизвестные реакции связей.

Задача. Груз *B* массой m=6 кг под действием силы тяжести (рис.189) опускается вниз из состояния

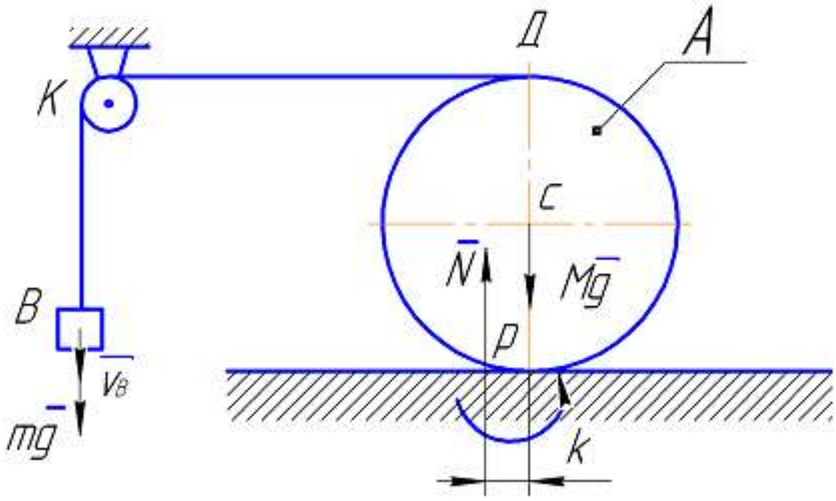


Рис.189

покоя приводя в движение цилиндрический каток *A* радиуса *r*=0,2 м и массы *M*=7 кг. Определить скорость υ_c центра *C* катка при прохождении грузом *B* высоты h=1,2 м, если коэффициент трения качения *k*=, радиус инерции катка относительно его оси ρ_c=0,1 м массой нити и блока *K* пренебречь.

Решение. Для определения υ_c воспользуемся уравнением:

$$T - T_0 = \sum dA_{\text{к}}^{\text{e}} \tag{а}$$

В нашем случае $T_0 = 0$.

$$T = T_{кат} + T_B$$

где $T_B = \dfrac{m\upsilon_{\text{В}}^2}{2}$, $T_{кат} = \dfrac{M\upsilon_{\text{c}}^2}{2} + \dfrac{J_c\omega^2}{2}$, $J_{\text{c}} = \text{M} \cdot \rho_{\text{c}}^2$.

Так как точка *P* является мгновенным центром скоростей, то $\omega = \dfrac{\upsilon_c}{r}$, $\upsilon_{\text{В}} = \upsilon_Д = 2\upsilon_c$. Следовательно:

$$T = \frac{\upsilon_c^2}{2}(4m + M + \frac{M\rho_c^2}{r^2}) \tag{б}$$

Работу совершает сила $\overline{mg}$ и пара $\overline{N}$, $M\overline{g}$.

Работа силы $\overline{mg}$ равна: $A(m\overline{g}) = mg \cdot h$.

Работу сил сопротивления качению вычисляется по формуле: $A^{\text{кач}} = -M_{con} \cdot \varphi = -kN\varphi = -\frac{k}{r} NS_c$, где $S_c = 0.5h$ - перемещение центра C катка, $N = Mg$. Тогда $\sum dA_{\text{к}}^{\text{e}} = mgh - \frac{k}{r} Mg \cdot 0.5h$ (в)

Подставив в (а) выражения (б) и (в), получим:

$$\frac{\upsilon_c^2}{2}(4m + M + \frac{M\rho_c^2}{r^2}) = gh(m - 0.5M\frac{k}{r}) \quad (г)$$

Откуда:

$$\upsilon_c = \sqrt{\frac{2gh(m - \frac{Mk}{2r})}{4m + M + \frac{M\rho_c^2}{r^2}}} \quad (д)$$

Подставив численные значения известных величин, получим:

υ_c=2м/с

8 ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Для получения уравнений движения или условий равновесия, можно не только применять законы Ньютона или общие теоремы динамики, но и другие общие положения, называемые *принципами механики*. Они имеют более эффективные методы решения задач. Одним из методов является принцип Даламбера.

Суть этого принципа для несвободной материальной точки выражается в следующем:

$$\overline{F}^{\text{a}} + \overline{N} + \overline{F}^{u} = 0 \quad (140)$$

$$\overline{F}^{u} = -m\overline{a} \quad (141)$$

$\overline{F}^{u} = -m\overline{a}$ называется силой инерции точки.

Силой инерции $\overline{F}^{u}$ называется векторная величина, равная по модулю произведению массы точки на её ускорение и направлена противоположно этому ускорению.

Движение точки обладает свойствами: если в любой момент времени к действующим на точку активным силам и реакции связи присодинить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип Даламбера эквивалентен второму закону Ньютона.

Для механической системы принцип Даламбера читается так: любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения истатики:

$$\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}} + \overline{F}_{\text{к}}^{\text{i}} + \overline{F}_{\text{к}}^{\text{u}} = 0 \tag{142}$$

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра равны нулю. Тогда на основании принципа Даламбера:

$$\sum(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}} + \overline{F}_{\text{к}}^{\text{i}} + \overline{F}_{\text{к}}^{\text{u}}) = 0,\ \sum\left[\overline{m}_0(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}}) + \overline{m}_0(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{i}}) + \overline{m}_0(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{u}})\right] = 0 \tag{143}$$

Если обозначить:

$$\overline{R}^{\text{u}} = \sum\overline{F}_{\text{к}}^{\text{u}},\ \overline{M}_0^{u} = \sum\overline{m}_0(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{u}}) \tag{144}$$

То получим:

$$\sum\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}} + \overline{R}^{u} = 0,\ \sum\overline{m}_0(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}}) + \overline{M}_0^{u} = 0 \tag{145}$$

где величины $\overline{R}^{u}$ и $\overline{M}_{0}^{u}$ представляют собой главный вектор и главный момент относительно центра *O* системы сил инерции.

8.1 Главный вектор и главный момент сил инерции

Если сравнить уравнение $\sum \overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}} + \overline{R}^{u} = 0$ и $M\overline{a}_{\text{c}} = \sum \overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}}$, то получим:

$$\overline{R}^{u} = -M\overline{a}_{\text{c}} \tag{146}$$

где *M* – масса системы.

Главный вектор сил инерции механической системы (твердого тела) равен произведению массы системы (тела) на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

Если ускорение $\overline{a}_{c}$ разложить на касательное и нормальное, то вектор $\overline{R}^{u}$ разложится на составляющие:

$$\overline{R}_{\tau}^{u} = -m\overline{a}_{c}^{\tau},\ \overline{R}_{n}^{u} = -m \cdot \overline{a}_{c}^{n} \tag{146*}$$

Сравнив уравнение $\sum \overline{m}_{0}(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}}) + \overline{M}_{0}^{u} = 0$ с уравнением $\frac{d\overline{\text{K}}_{0}}{dt} = \sum \overline{m}_{0}(\overline{F}_{\text{к}}^{\text{e}})$, выражающим теорему моментов, получим:

$$\overline{M}_{0}^{u} = -\frac{d\overline{\text{K}}_{0}}{dt} \text{ или } M_{z}^{u} = -\frac{d\text{K}_{\text{z}}}{\text{dt}} \tag{147}$$

Главный момент сил инерции механической системы (твердого тела) относительно некоторого центра *O* или оси *Z* равен взятой со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы (тела) относительно того же центра или той же оси.

Систему сил инерции твердого тела можно заменить одной силой $\overline{R}^{\text{и}}$, приложенной в произвольно выбранном центре *O* и парой с моментом, равным $\overline{M}_0^u$.

1. Поступательное движение.

В этом случае ускорения всех точек одинаковы и равны ускорению $\overline{\text{a}}_{\text{c}}$ центра масс. Тогда все силы инерции $\overline{F}_{\text{к}}^{\text{и}} = -m_{\text{к}}\overline{a}_c$ образуют систему параллельных сил и имеют равнодействующую, проходящую через точку *C*.

2. Вращательное движение.

Система сил инерции (рис.190) вращающегося тела приводится к силе $\overline{R}^u$, определяемой равенством:

$$\overline{R}^u = -m\overline{a}_c$$

и приложенной в точке *O*, и к паре с моментом M_{0z}^u:

$$M_{0z}^u = J_{oz} \cdot \varepsilon \tag{148}$$

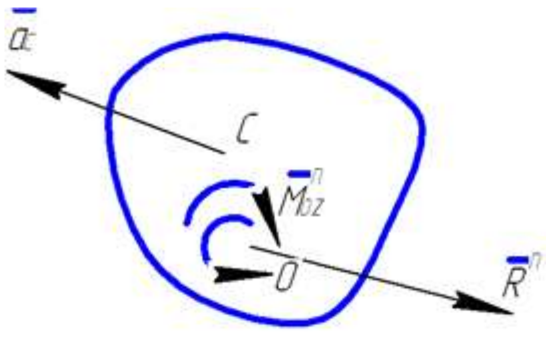


Рис.190

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

В этом случае $\overline{a}_c = 0$, значит $\overline{R}^u = 0$

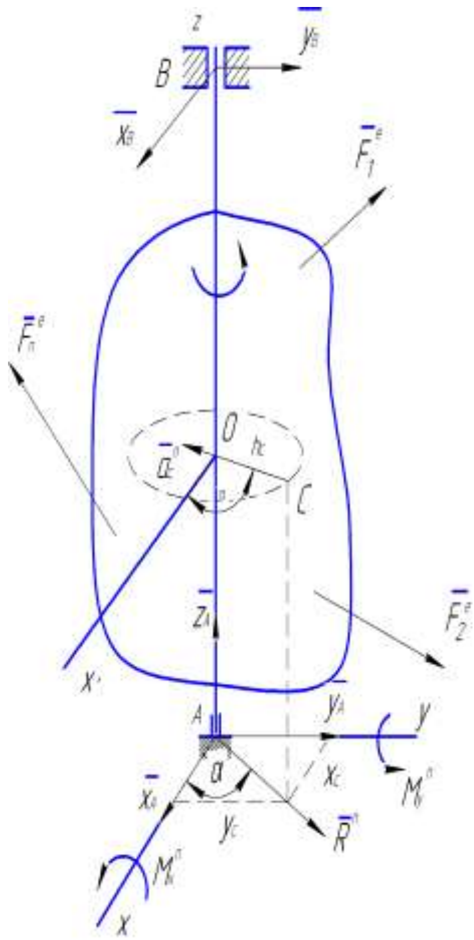
Следовательно, система сил инерции тела к одной только паре с моментом M^u_{cz}, лежащей в плоскости симметрии тела.

4. Плоскопараллельное движение

Если тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно этой плоскости, то система сил инерции приводится к лежащим в плоскости симметрии силе, равной $\overline{R}^u$ и паре приложенной в центре масс *C* тела, и паре с моментом $M^u_{cz} = -J_{cz} \cdot \varepsilon$.

8.2 Динамичсекие реакции вращающегося тела

При вращении твердого тела (рис.191) вокруг неподвижной оси возникают динамические давления на опоры. Пусть тело вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси Z, закрепленной в подшипниках *A* и *B*. Свяжем с телом вращающиеся вместе с ним оси A_{xyz} и тогда координаты центра масс и моменты инерции тела будут величинами постоянными.



Согласно принципу Даламбера при действии на тело заданных сил $\overline{F}_1^e$, $\overline{F}_2^e$, $\ldots, \overline{F}_n^e$ составим уравнение равновесия:

$$x_A + x_B + R_x^e + R_x^u = 0$$

$$y_A + y_B + R_y^e + R_y^u = 0$$

$$z_A + z_B + R_z^e + R_z^u = 0 \qquad (149)$$

$$-y_B в + M_x^e + M_x^u = 0$$

$$x_B в + M_y^e + M_y^u = 0$$

где $R_x = \sum F_{кx}^e$, $R_y = \sum F_{кy}^e$, $R_z = \sum F_{кz}^e$, $M_x^e = \sum m_x(\bar{F}_к^e)$, $M_y^e = \sum m_y(\bar{F}_к^e)$, $M_z^e = 0$, т.к. $\omega = const$. $M_z^u = 0$, $M_x^u = \sum m_x(\bar{F}_к^u)$, $M_y^u = \sum m_y(\bar{F}_к^u)$, *АВ=в.*

Учитывая, что $x_c = h_c \cos\alpha$, $y_c = h_c \sin\alpha$ имеем:

$R_x^u = m\omega^2 h_c \cos\alpha = m\omega^2 x_c$; $R_y^u = m\omega^2 h_c \sin\alpha = m\omega^2 y_c$; $R_z^u = 0$, т.к. $\omega = const$, то центр масс *C* имеет только нормальное ускорение: $a_{cn} = \omega^2 h_c$

Рис.191

Для любой частицы тела массой $m_к$

$F_к^u = m_к \omega^2 h_к$ и ее проекции будут:

$F_{кx}^u = m_к \omega^2 x_к$, $F_{кy}^u = m_к \omega^2 y_к$, $F_{кz}^u = 0$, тогда:

$m_x(\bar{F}_к^u) = -F_{кy}^u z_к = -m_к \omega^2 y_к z_к$

$m_y(\bar{F}_к^u) = -F_{кx}^u z_к = -m_к \omega^2 x_к z_к$

Для всех точек тела:

$$M_x^u = -(\sum m_к y_к z_к)\omega^2 = -J_{yz}\omega^2 \qquad (150)$$

$$M_y^u = -(\sum m_к x_к z_к)\omega^2 = -J_{xz}\omega^2$$

где J_{xz} и J_{yz} - центробежные моменты инерции.

Подставив в (149) найденные значения, получим:

$$x_A + x_B = -R_x^e - m x_c \omega^2$$

$$y_A + y_B = -R_y^e - m y_c \omega^2$$

$$z_A = -R_z^e \qquad (151)$$

$$x_B \cdot в = -M_y^e - J_{xz}\omega^2$$

$$y_B \cdot \text{в} = \text{-}\mathrm{M}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{e}} - J_{yz}\omega^2$$

Уравнения (151) определяют динамические реакции, действующие на ось равномерно вращающегося твердого тела.

Если положить $\omega = 0$, то уравнения (151) дадут значения статических реакций.

Механичсеский смысл центробежных моментов инерции заключается в том, что они характеризуют степень динамичсекой неуравновешенности тела при его вращении вокруг оси *Z*.

В технике важную роль играет определение главных центрабежных осей инерции тела (динамическое уравновешивание). Эту задачу можно решить, сделав любую ось главной центральной осью инерции прибавлением к телу двух точечных масс. Такой метод широко используется в технике для балансировки коленчатых валов, кривошипов, спарников и т.п. на специальных стендах.

Задача. На горизонтальной балке *AB* длиной *в=1,2* м установлен электромотор (рис.192), который поднимает груз массы *m=20 кг* с ускорением *a=0,8 м/с*^{2}. Радиус барабана *r=0,2 м*, а момент инерции барабана вместе с ротором равен J_z*=1,6 кгм*^{2} (рис. 67).

Определить динамические реакции опор *A* и *B*, если расстояние *l=0,3 м*.

Решение. Приложим действующие силы на механическую систему. Так как мы определяем только динамические реакции, то и на систему действуют сила инерции $\overline{F}^{u} = m \cdot \overline{a}$ и направлена вниз.

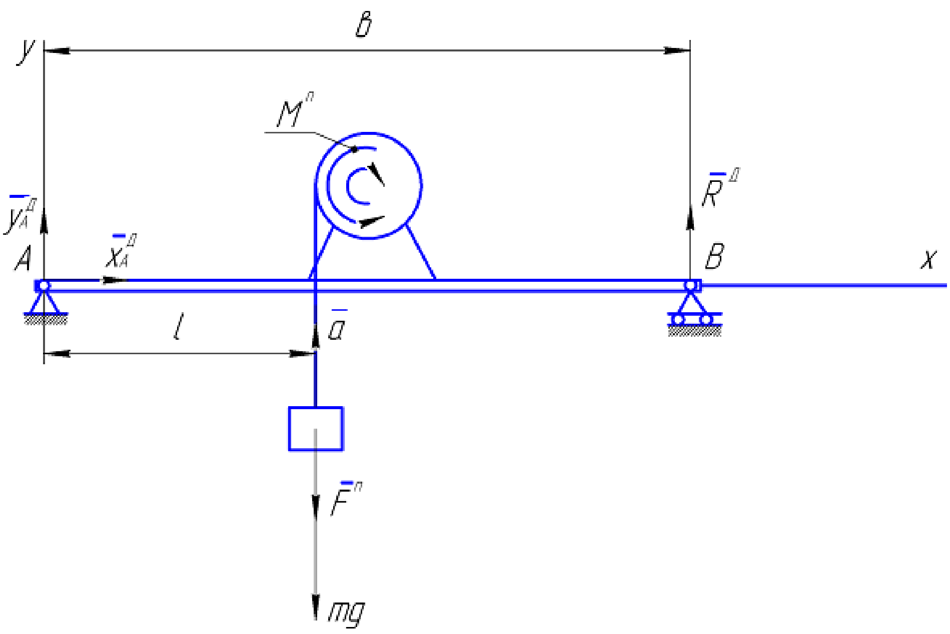


Рис.192

Главный момент сил инерции равен по модулю $M^и = J_z \cdot \varepsilon$ и направлен против хода часовой стрелки. Главный вектор сил инерции барабана равен нулю, ибо его центр масс неподвижен. Динамические реакции $\bar{x}_A^Д$, $\bar{y}_A^Д$ и $\bar{R}^Д$ приложены соответственно в опорах *A* и *B*. Активные силы не учитываем и, поэтому, составляем уравнения равновесия для сил инерции и добавочных динамических реакций:

$$\sum F_{кх} = 0, \; x_A^Д = 0,$$

$$\sum M_A = 0, \; J_z \cdot \varepsilon - R_В^Д \cdot в - m \cdot a \cdot l = 0, \tag{a}$$

$$\sum M_В = 0, \; J_z \cdot \varepsilon - Y_А^Д \cdot в - m \cdot a \cdot (в - l) = 0$$

Учитывая, что $\varepsilon = \dfrac{a}{r} = 4\dfrac{рад}{с^2}$, находим:

$$x_A^Д = 0, \; Y_А^Д = \frac{J\varepsilon + ma(в\text{-}l)}{b} = 19{,}4H, \; R_В^Д = \frac{J_z\varepsilon - mal}{b} = 1.3H$$

9 ПРИНЦИП ВОЗОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

9.1 Классификация связей

Связями называются ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы.

Связи называются *стационарными*, если они не меняются со временем, а изменяющие со временем – *нестационарными*.

Связи, налагающие ограничения на положения (координаты) точек системы, называются *геометрическими*.

Связи, налагающие ограничениянa скорости (первые производные от координат по времени) точек системы называются *кинематическими* или *дифференциальными*.

Связь азывается *интегрируемой*, если устанавливается зависимость между скоростями и координатами. В противном случае - *неинтегрируемой*.

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называются *голономными*, а не интегрируемые дифференциальные связи – *неголономными*.

Связи называются *удерживающими*, если налагаемые ими ограничения сохраняются при любом положении системы. Неудерживающие этими свойствами не обладают.

1. Связи, рассмотренные в статике, являются геометрическими (голономными) и стационарными.

2. Для груза, движущегося лифта (рис. 193) по отношению к неподвижным осям *Oxy*, пол кабины является нестационарной геометрической связью (он меняет свое положение в пространстве).

3. Наложенная связь для катящегося катка без скольжения является голономной (рис.194), т.к. положение катка лпределяется координатой *Xc* его центра *C* и углом поворота φ, то при качении катка выполняется условие $\upsilon_c = R\omega$ или $\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$. Это дифференциальная связь, но полученное уравнение интегрируется и дает $x_c = R\varphi$, т.е. сводится к зависимости между координатами

x_c и φ. Следовательно, наложенная связь гололномная. Но так как здесь выполняется $\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$ условие, то эта связь является еще и кинематической.

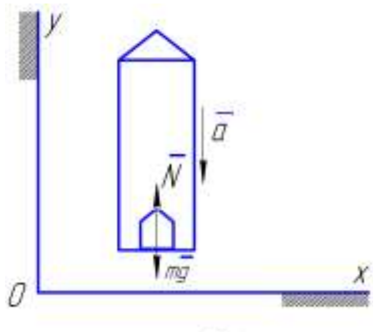


Рис. 193

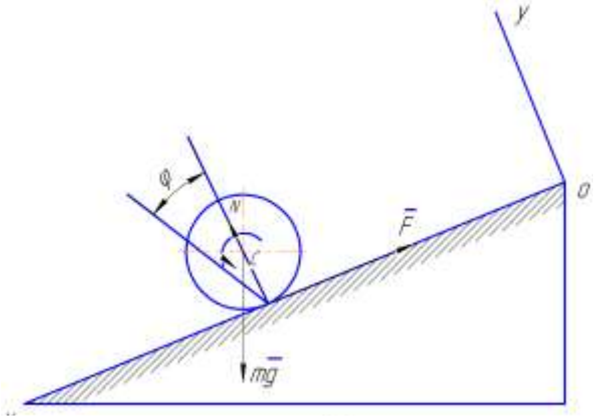


Рис. 194

4. Для шара, катящегося без скольжения по шероховатой плоскости не существует зависимости между координатами, определяющей положение шара. Это пример неголономной связи (рис.195).

Рис. 195

5. Связи (рис. 196 а и б) – неудерживающие.

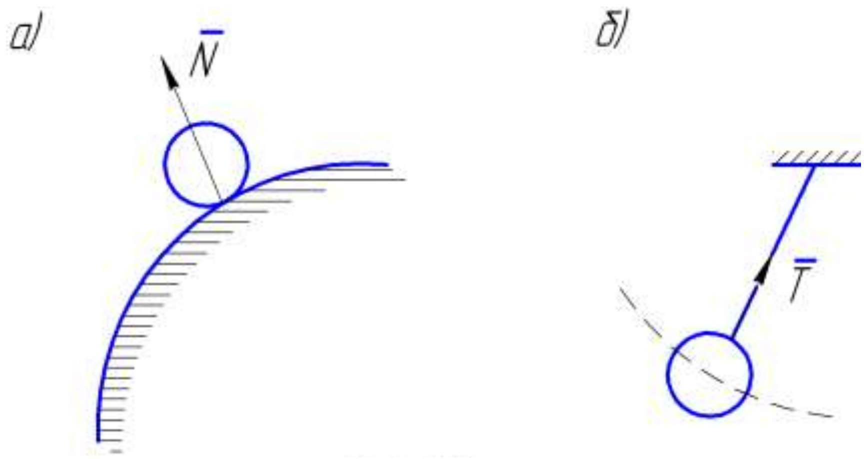


Рис. 196

9.2 Возможные перемещения системы. Число степеней свободы

Рассмотрим перемещения, которые могут иметь точки механической системы при положенных на нее связях. Это позволяет получить уравнения равновесия или движения системы, не содержащие наперед неизвестных реакций связи, что облегчает решение задач механики.

Такие всевозможные перемещения называются *возможными (или виртуальными).*

Они должны удовлетворять двум условиям:

1) быть элементарными;

2) в данный момент времени связи сохранялись.

Будем обозначать $\delta_{\bar{r}}$ - возможное перемещение;

δ_x, δ_y, δ_z - проекции $\delta_{\bar{r}}$ на координатные оси.

Очевидно, что при стационарных связях действительное перемещение $d_{\bar{r}}$ любой точки системы совпадает с одним из возможных перемещений не совпадает. Для любой из систем, которые мы будем рассматривать, можно указать некоторое число независимых перемешений, когда всякое другое возможноен перемещение может быть выражено через них.

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называются *числом степеней свободы этой системы.*

Пример:

а) точка, находящаяся на плоскости, имеет две степени свободы. Ее положение на плоскости определяется двумя координатами x и y;

б) свободная материальная точка имеет три степени свободы, т.к. ее положение определяется тремя независимыми координатами x, y, z.

У механической системы с геометрическими связями число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом степеней свободы.

Поэтому у такой степени системы число степеней свободы можно определять как по числу независимых возможных перемещений, так и по числу независимых координат. Так у кривошипно-ползунного механизма (рис. 197) одна степень свободы (у него одна независимая координата, например, угол φ) или одно независимое перемещение $\delta S_{В}$.

У свободного твердого тела шесть степеней свободы: три поступательных независимых осей и три поворотных вдоль координатных осей, а независимых координат – три координаты полюса и три угла Эйлера.

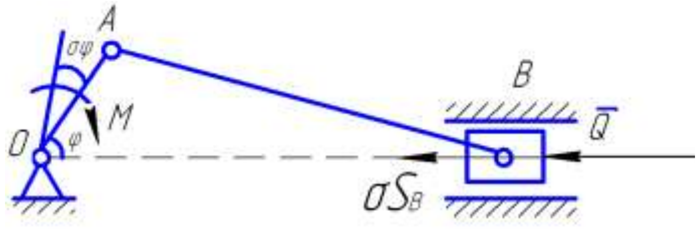


Рис. 197

9.3 Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия механической системы.

Введем понятие о возможной (элементарной) работе. Обозначим:

$$\delta A^a = \overline{F}^a \cdot \delta \overline{r} \quad (152)$$

где $\overline{F}^a$ - активная сила;

Возможную работу силы реакции $\overline{N}$ связи обозначим символом δA^r

$$\delta A^r = \overline{N} \cdot \delta \overline{r} \quad (153)$$

Идеальными называются связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum \delta A_{\kappa}^{r} = 0 \qquad (154)$$

Выражение

$$\sum \delta A_{\kappa}^{a} = 0 \qquad (155)$$

или:

$$\sum \overline{F}_{\text{к}}^{a} \cdot \delta \overline{r}_{\text{к}} = \sum \overline{F}_{\text{к}}^{a} \delta S_{\text{к}} \cos \alpha_{\text{к}} \qquad (155^{*})$$

является необходимым и достаточным условием равновесия.

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$dT = \sum dA_{\text{к}}^{a} = \sum \overline{F}_{\text{к}}^{a} \cdot d\overline{r}_{\text{к}} \qquad (156)$$

где $dT > 0$, т.к. в начале система была в покое и $\sum dA_{\text{к}}^{a} > 0$.

Из выше изложенного следует принцип возможных перемещений: *для равновесия* механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

В аналитической форме можно представить принцип возможных перемещений:

$$\sum (F_{\kappa x}^{a} \delta x_{\kappa} + F_{\text{кy}}^{\text{a}} \delta y_{\text{к}} + F_{\text{кz}}^{\text{a}} \delta z_{\text{к}}) = 0 \qquad (157)$$

Задача. Балка *АД* длиной 6 м (рис.198), состоящая из двух брусков и соединена шарниром *С* так, что длина *СД=2 м*. Расположение опор *А, В* и *Д* показаны на рисунке. Определить силу давления на опору *В*, вызываемую данной нагрузкой *Р=1000 Н.*

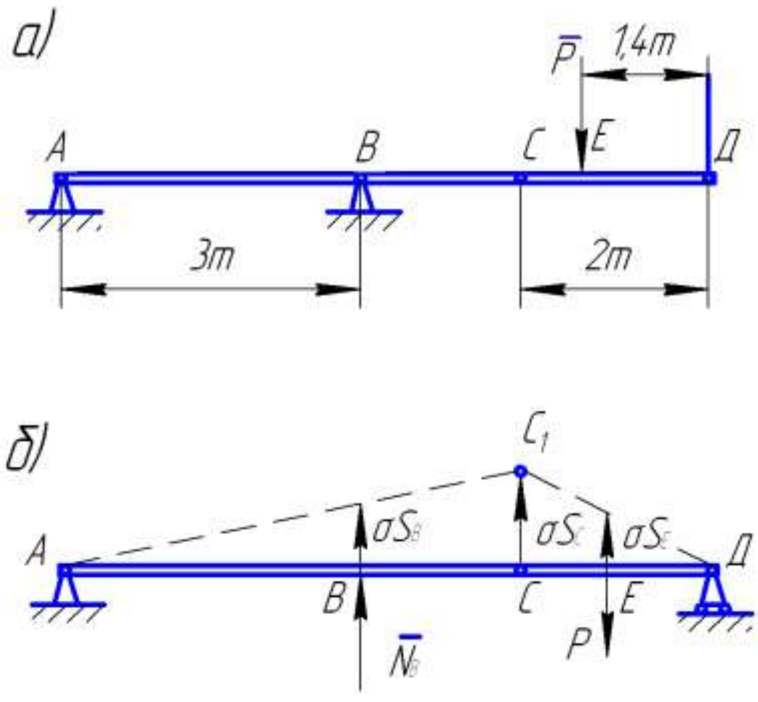


Рис.198

Решение. Заменим опору *B* реакцией $\overline{N}_B$. Сообщим системе возможное перемещение. Точка *B* будет иметь перемещение δS_B, точка *C* - δS_c, точка *E*- δS_E. Применяя условие равновесия (155):

$$\sum \delta A_к^a = 0 \text{ или } N_B \delta S_B - P \delta S_E = 0 \qquad (a)$$

Выразим δS_B через δS_E:

$$\frac{\delta S_B}{AB} = \frac{\delta S_c}{AC} \text{ и } \frac{\delta S_c}{СД} = \frac{\delta S_E}{ЕД}\text{; откуда } \delta S_E = \frac{14}{15}\delta S_B$$

Подставив в (а) значение δS_E, получим:

$$N_B = 933.34H$$

10 ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Совмещая принцип возможных перемщений (общий метод решения задач статики) с принципом Даламбера, можно получить общий метод решения задач динамики.

Если на систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи, кроме действующих активных сил $\overline{F}_к^u = -m_к \overline{a}_к$, то согласно принципа Даламбера система будет находиться в равновесии. Применяя к этим силам принцип возможных перемещений, получим:

$$\sum \delta A_к^a + \sum \delta A_к^u + \sum \delta A_к^r = 0$$

но последняя сумма $\sum \delta A_к^r = 0$, т.к наложенные связи идеальные, то:

$$\sum \delta A_к^a + \sum \delta A_к^u = 0 \qquad (158)$$

Отсюда вытекает принцип Даламбера – Лагранжа: <u>при движении</u> механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и сил инерций на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

Принцип (158) называют *общим уравнением динамики*. В аналитической форме уравнение (158) имеет вид:

$$\sum \left[(F_{кx}^a + F_{кx}^u)\delta x_к + (F_{кy}^a + F_{кy}^u)\delta y_к + (F_{кz}^a + F_{кz}^u)\delta z_к \right] = 0 \qquad (159)$$

Задача. Определить ускорение груза *А*, если он переброшен через блок *Д* и соединен с грузом *В* нерастяжимой нитью. Груз *А* массы $m_1=50$ *кг* спускается вниз. Груз *В* массы $m_2=38$ *кг* поднимается вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Коэффициент трения, скольжения груза *В* о наклонную плоскость равен *f=0,1*. масса блока Д равна m_3*=4 кг*. Блок считать однородным круглым диском (199).

*Решени*е. Применим общее уравнение динамики для механической системы, состоящей из трех тел. Направим ось *Z* вращения блока *Д* за рисунок.

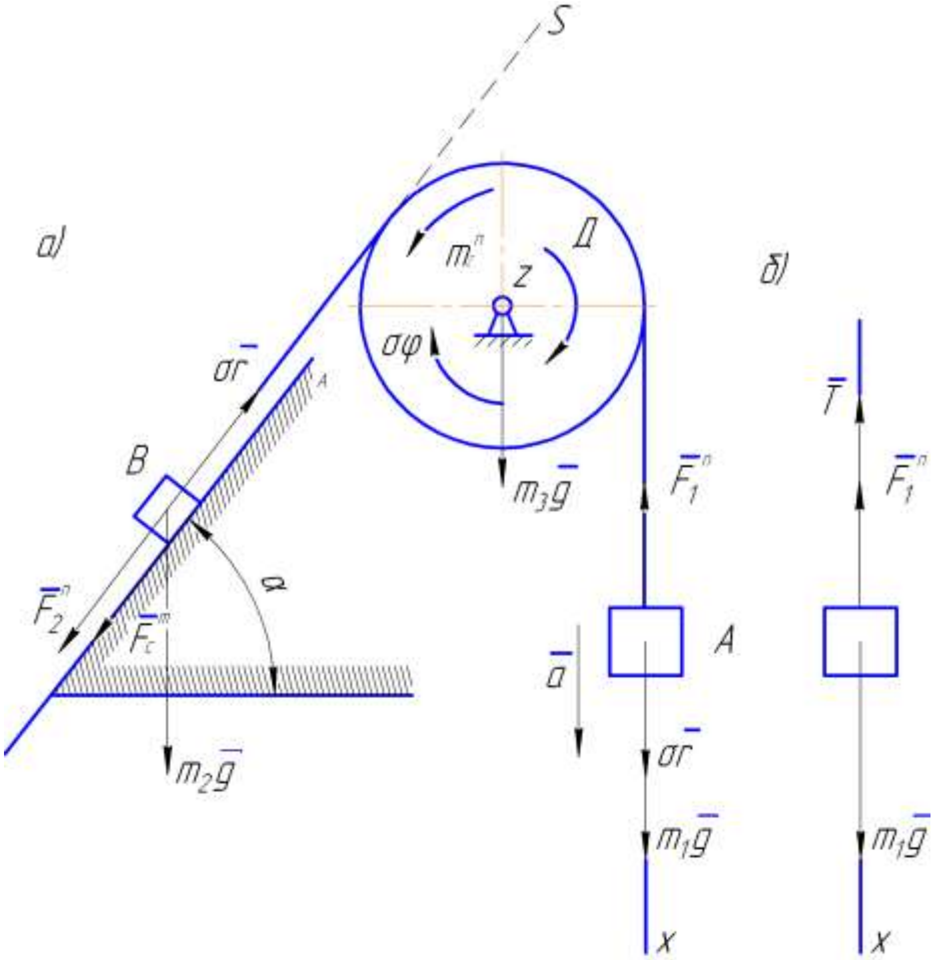


Рис.199

На систему действуют активные силы:

$m_1\bar{g}$ - сила тяжести груза *А,*

$m_2\bar{g}$ - сила тяжести груза *В*,

$m_3\bar{g}$ - сила тяждести блока *Д*.

Наложение идеальных связей исключает реакции в общем уравнении динамики. Введем силу трения скольжения $\bar{F}_c^m$ тела *В* о наклонную плоскость и добавим силы инерции.

Пусть груз A опускается вниз с ускорением $\bar{a}$. Тогда силы инерции $\bar{F}_1^u$ и $\bar{F}_2^u$ при поступательных движениях грузов A и B направлены в противоположные стороны ускорениям $\bar{a}$, и равны по модулю:

$$F_1^u = -m_1 a, \; F_2^u = -m_2 a \tag{а}$$

Для блока *Д* момент сил инерции равен:

$$m_z^u = -J_z \varepsilon$$

где $J_z = \dfrac{m_3 r^2}{2}$, $\varepsilon = \dfrac{a}{r}$, r - радиус блока, и тогда:

$$m_z^u = -\frac{m_3 r a}{2} \tag{б}$$

Дадим возможное пермещение грузу А: $\delta \bar{r}$. Блок *Д* получит угловое возможное перемещение $\delta\varphi$. Зависимость между этими пермещениями будет:

$$\delta r = r \cdot \delta\varphi \tag{в}$$

Применим к материальной системе общее уравнение динамики:

$$m_1 g\delta r + F_{1x}^u \delta r + m_z^u \delta\varphi - m_2 g \delta r \sin\alpha - F_c^m \delta r + F_{2s}^u \delta r = 0 \tag{г}$$

где $F_c^m = fN = fm_2 g\cos\alpha$, сократив на δr получим:

$m_1 g - m_1 a - m_3 a - m_2 g\sin\alpha - fm_2 g\cos\alpha - m_2 a = 0$, отсюда находим a:

$$a = 2g\frac{m_1 - m_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{2m_1 + 2m_2 + m_3} \tag{д}$$

Подставим известные величины в (д), получим:

а=3,01 м/с²

а>0, т.е. груз *А* движется вниз.

11 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

11.1 Потенциальное силовое поле

Известно, что работа на перемещении M_1M_2 силы $\bar{F}$ вычисляется по формуле:

$$A(M_1M_2) = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dA = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \tag{160}$$

где силы F_x, F_y, F_z образуют силовое поле, т.е. либо они постоянные, либо зависят от координат.

Так как сила определяется по проекциям на координатные оси, то силовое поле залается уравнениями:

$$F_x = \Phi_1(x, y, z),\ F_y = \Phi_2(x, y, z),\ F_z = \Phi_3(x, y, z) \tag{161}$$

11.2 Силовая функция

Если выражение, стоящее в формуле(160) под знаком интеграла окажется полным дифференциалом некоторой функции $U(x,\text{y},\text{z})$:

$$dA = dU(x,\text{y},\text{z}) \text{ или } F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU(x,\text{y},\text{z}) \tag{162}$$

Работу *A(M₁M₂)* можно вычислить, на зная заранее траекторию точки *M*.

Функция *U* от координат x, y, z, дифференциал которой равен элементарной работе, называется *силовой функцией*. Силовое поле, для которого существует силовая функция, называется *потенциальным силовым* *полем*, а силы, действующие в этом поле, - *потенциальными силами.* Силовая функция является однозначной функцией координат.

Если в формулу (160) подставить выражение *dA* из (162), то получим:

$$A(M_1M_2) = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dU(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = U_2 - U_1 \tag{163}$$

где $U_1 = U(x_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1)$ и $U_2 = U(x_2, \mathrm{y}_2, \mathrm{z}_2)$ - значение силовой функции в точках M_1 и M_2.

Следовательно, *работа потенциальной силы* равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и от вида траекторий движущейся точки не зависит. При движении по замкнутой траектории $U_1 = U_2$ и работа потенциальной силы равна нулю.

Работа сил поля не зависит от вида ее траектории, ни от закона движения, а зависит только от начального и конечного положения материальной точки.

Силы, работа которых зависит от траектории или от закона движения точки, называются *непотенциальными.*

К таким силам относятся силы трения и сопротивления среды.

Потенциальными силами являются силы тяжести, упругости и тяготения.

Покажем, что для потенциальных сил существуют силовые функции. Из (162) следует:

$$U = \int dA + C \quad \text{или} \quad U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C \tag{164}$$

1. Для поля силы тяжести:

$$U = -Pz \text{ ; ось z направлена вверх} \tag{165}$$

2. для поля силы упругости:

$$U = -\frac{cx^2}{2}\,; \tag{166}$$

сила упругости действует вдоль оси X;

3. для поля силы тяготения:

$$U = \frac{mgR^2}{r} \tag{167}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Если в потециальном силовом поле находится система материальных точек, то силовой функцией будет такая функция координат точек системы $U(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$, для которой:

$$dU = \sum dA_к \tag{168}$$

т.е. дифференциал которой равен сумме элементарных работ всех действующих на систему сил поля.

11.3 Потенциальная энергия

Потенциальной энергией в данном ее положении М называется скалярная величина *П*, равная той работе, которую производит симлыполя при перемещении точки из положения *М* в нулевое:

$$П = A_{(MO)}$$

Потенциальная энергия зависит от координат *x, y, z* точки *М*, т.е. *П=П(x, y, z)*.

Если считать нулевые точки для функций *П(x, y, z)* и *U(x, y, z)* совпадающими, то $U_0=0$ и по формуле (163) $A_{(MO)} = U_0 - U = -U$, где U – значение силовой функции в точке *М* поля. Тогда:

$$П(x, y, z) = -U(x, y, z) \tag{169}$$

Потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.

Отсюда следует, что вместо силовой функции можно пользоваться понятием потенциальной энергии. Тогда работу потенциальной силы можно вычислять по формуле:

$$A_{(M_1M_2)} = \Pi_1 - \Pi_2 \tag{170}$$

Работа потенциальной силы равна разности значений потенциальной энергии движущейся точки в начальном и конечном ее положениях.

Тогда:

1. для поля силы тяжести (ось z вертикально вверх):

$$\Pi = Pz \tag{171}$$

2. для поля сил упругости (линейного):

$$\Pi = \frac{cx^2}{2} \tag{172}$$

3. для силы тяготения:

$$\Pi = -\frac{mgR^2}{r} \tag{173}$$

Потенциальная энергия системы равна:

$$\Pi = \sum A_{(M_к O_к)}$$

Зависимость между потенциальной энергией и силовой функцией будет такой же, как и для точки:

$$\Pi(x_1, y_1, z_1, \mathrm{x_n}, y_n, \mathrm{z_n}) = -U(x_1, y_1, z_1, \mathrm{x_n}, y_n, \mathrm{z_n})$$

11.4 Закон сохранения механической энергии

Если все действующие на систему внешние и внутренние силы потенциальны, то:

$$\sum A = \Pi_0 - \Pi_1$$

Подставив это выражение в (135), получим:

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1$$

или

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = const \qquad (174)$$

При движении системы под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергий системы в каждом ее положении остается величиной постоянной.

Величина *Т+П* называется *полной механической энергией системы.*

Механическая система, для которой выполняется закон (174) называется *консервативной системой.*

12 УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

12.1 Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Рассмотрим голономную систему, у которой число независимых координат совпадает с числом ее степеней свободы. Такими координатами могут быть параметры, имеющие любые размерности: отрезки, дуги, углы, площадки и т.п. Такие независимые между собой параметры называются *обобщенными координатами*. Будем обозначать обобщенные координаты буквой q.

Тогда положение системы, имеющей S степеней свободы, будет определяться S обобщенными координатами:

$$q_1, q_2, \ldots q_s \tag{175}$$

Так как обобщенные координаты между собой независимы, то элементарные приращения этих координат:

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta_n \text{ также между собой независимы} \tag{176}$$

При движении системы ее обобщенные координаты будут с течением времени непрерывно изменяться:

$$q_1 = f_1(t),\ q_2 = f_2(t),\ q_s = f_s(t) \tag{177}$$

Это кинетические уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Производные от обобщенных координат по времени называются *обобщенными скоростями системы*, и обозначаются:

$$\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \dot{q}_s,$$

где $\dot{q}_1 = \dfrac{dq_1}{dt}$ и т.д. Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты.

12.2 Обобщенные силы

Пусть механическая система, состоящая из *n* материальных точек, имеет *S* степеней свободы и на нее действуют силы $\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,\ \ldots \overline{F}_n$.

Сообщим системе независимое перемещение, при котором координата q_1 получает приращение δq_1, а остальные координаты не изменяются. Тогда каждый из радиусов- векторов $\bar{r}_к$ точек системы получит элементарное приращение $(\delta\bar{r}_к)_1$. Поскольку $\bar{r}_к = \bar{r}_к(q_1, q_2, q_s)$.

$$(\delta\bar{r}_к)_1 = \frac{\partial\bar{r}_к}{\partial r_1}\delta q_1$$

Используя формулу $dA = \overline{F}\cdot d\bar{r}$ вычислим сумму элементарных работ всех действующих сил, которую обозначим δA_1:

$$\delta A_1 = \overline{F}_1\cdot(\delta\bar{r}_1)_1 + \overline{F}_2\cdot(\delta\bar{r}_2)_1 + \ldots + \overline{F}_n\cdot(\delta\bar{r}_n)_1 = \overline{F}_1\cdot\frac{d\bar{r}_1}{dq_1}\delta q_1 + \overline{F}_2\cdot\frac{d\bar{r}_2}{dq_1}\delta q_1 + \ldots\overline{F}_n\cdot\frac{d\bar{r}_n}{dq_1}\delta q_1$$

Вынося δq_1 за скобки, найдем:

$$\delta A_1 = Q_1\delta q_1 \qquad (178)$$

где обозначено:

$$Q_1 = \sum \overline{F}_к\cdot\frac{\partial\bar{r}_к}{\partial q_1} \qquad (179)$$

Величина Q_1 обобщенная сила, которая соответствует координате q_1.

При изменении только координаты q_2 получим:

$$\delta A_2 = Q_2 \delta q_2 \tag{180}$$

где

$$Q_2 = \sum \overline{F}_к \frac{\partial \overline{r}_к}{\partial q_2} \tag{181}$$

Величина Q_2 - обобщенная сила, соответствующая координате q_2 и т.д.

Если одновременно изменяются все координаты, то сумма элементарных работ прилдоженных сил на этом перемещении будет:

$$\sum \delta A_к = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... Q_s \delta q_s \tag{182}$$

Из равенства (182) видно, что *обобщенные силы* – это коэффициенты при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.

А если наложенные на систему связи являются только идеальными, то работу совершают только активные силы и величины $Q_1,\ Q_2,\ \dots Q_s$ *есть обобщенные активные силы системы.*

Размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Например, если *q* – линейная величина, то *Q* имеет размерность обычной силы (в СИ измеряется в Ньютонах); если *q* – угол, то *Q* измеряется в *Н·м* (размерность момента); если *q* – объем, то *Q* измеряется в *Н/м*^{2} и имеет размерность давления и т.д.

Вычисление обобщенных сил производится по формулам:

$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1$, $\delta A_2 = Q_2 \delta q_2$, что сводится к вычислению возможной элементарной работе:

1. определяется число степеней свободы системы;

2. выбираются обобщенные координаты;

3. изображаются действующие на систему активные силы и силы трения;

4. сообщаем возможное перемещение, при котором изменяются только координата q_1, получая положительное приращение δq_1;

5. вычисляем сумму элементарных работ всех действующих сил.

Пример. Определить обобщенные силы для системы (рис. 200), состоящей из груза A весом P_1, перемещающегося по гладкой наклонной плоскости, и груза B весом P_2, подвешенного к грузу A на нерастяжимой нити длиной l.

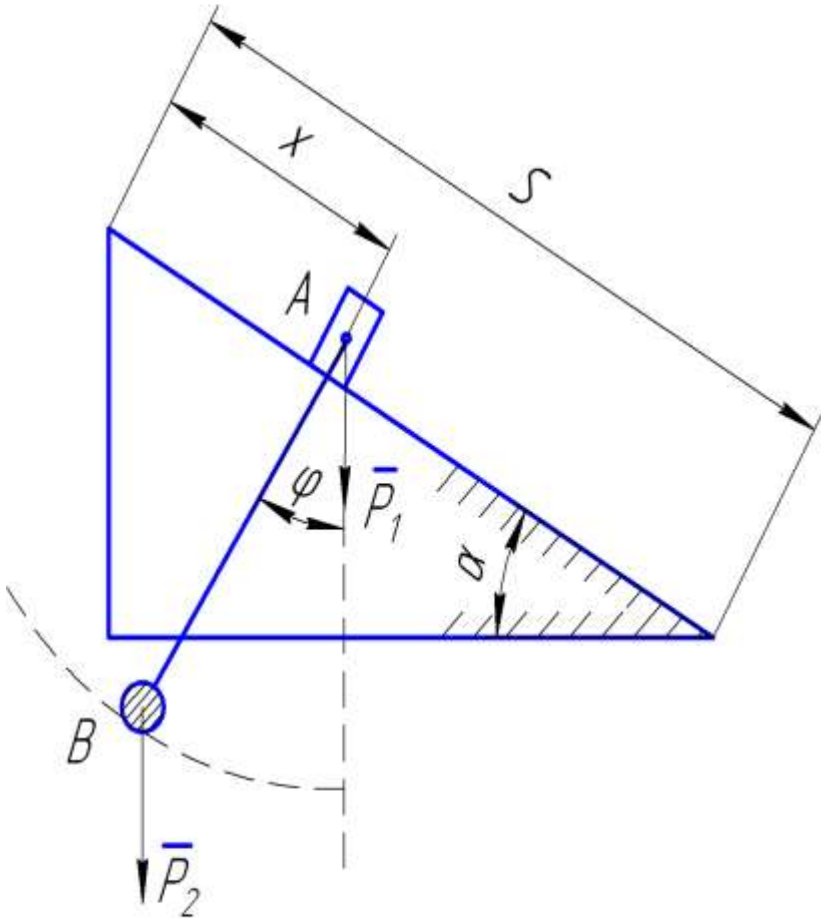


Рис. 200

Решение. Система обладает двумя степенями свободы: независимыми являются перемещение груза A по наклонной плоскости и колебание груза B относительно точки A в вертикальной плоскости. В качестве обобщенной координаты возьмем линейную величину x, которая определяет положение груза A на наклонной плоскости, и угол φ, определяющий положение груза B относительно тела A.

Обозначим: $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$.

Пусть x получит положительное приращение δx, $\varphi = const$. Тода сумма возможных работ для сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ на этом перемещении системы будет:

$(\sum \delta A_к)_{q_1} = (P_1 + P_2)\sin\alpha\delta x$, отсюда следует, что $(P_1 + P_2)\sin\alpha = Q_1$ и есть обобщенная сила.

Дадим теперь положительное приращение $\delta\varphi$ координате φ, оставив неизменной обобщенную координату x. на данном перемещении работу производит только сила $\overline{P}_2$. Значит:

$(\sum \delta A_к)_{q_2} = -P_2 l\sin\varphi\delta\varphi$, коэффициент при $\delta\varphi$ $-P_2 l\sin\varphi = Q_2$ и есть обобщенная сила.

Рассмотрим случай потенциальных сил.

Если все силы, действующие на систему являются потенциальными, то существует силовая функция U, зависящая от координат $x_к, y_к, z_к$ и тогда:

$\sum \delta A_к = \delta U$ и переходя к координатам $q_1, q_2, ...q_s$ все $x_к, y_к, z_к$ могут быть выражены через эти координаты. Следовательно:

$\sum \delta A_к = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s$, сравнивая это с (182), получим:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1},\ Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2},\ \ldots,\ Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} \qquad (183)$$

Имея, что $\Pi = -U$, то:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1},\ Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2},\ \ldots,\ Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \qquad (184)$$

Если все действующие силы потенциальны, то обобщенные силы равны частным производным от силовой функции по соответствующим обобщенным координатам.

Рассмотрим решение предыдущей задачи (рис. 73) другим способом (через потенциальные силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$).

Теперь для вычисления обобщенных сил можно использовать равенство (184). Для этого определяем потенциальную энергию системы, принимая за нулевой уровень для груза *A* основание наклонной плоскости, а для груза *B* – его нижнее отвесное положение.

$$П = (P_1 + P_2)(S\text{-}x)\sin\alpha + P_2 l(1 - \cos\varphi)$$

Беря частные производные, получаем:

$$Q_1 = -\frac{\partial П}{\partial x} = (P_1 + P_2)\sin\alpha\,;\; Q_2 = -\frac{\partial П}{\partial \varphi} = -P_2 l\sin\varphi$$

Такой же результат, как и в первом случае.

12.3. Условия равновесия системы в обобщенных координатах

Согласно принципу возможных перемещений $\sum \delta A_к = 0$, а в обобщенных координатах будет:

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + ... + Q_s\delta q_s = 0 \qquad (185)$$

Все величины $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_s$ между собой независимы, то равенство (185) выполняется, если:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q\text{s} = 0 \qquad (186)$$

<u>Для равновесия механической системы</u> необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам, были равны нулю.

В случае потенциальных сил условием равновесия будут уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial U}{\partial q_2}=0,\ \frac{\partial U}{\partial q_s}=0 \qquad (187)$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}=0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}=0 \qquad (187^*)$$

т.е. полный дифференциал функций U или Π равен нулю:

$$dU(q_1, q_2, ..., q_s)=0 \text{ или } d\Pi(q_1, q_2, ..., q_s)=0 \qquad (188)$$

Равенства (187) и (188) выражают необходимые условия экстремума функции нескольких переменных.

12.4 Уравнения Лагранжа

Найдем уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Предположим, что наложенные связи являются идеальными и система имеет S степеней свободы, а ее положение определяется обобщенными координатами:

$$\sum \delta A_к = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + ...Q_s\delta q_s \qquad (189)$$

Для сил инерций $\overline{F}_к^и$, которые входят в общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_к + \sum \delta A_к^и = 0 \qquad (190)$$

Можно записать:

$$\sum \delta A_{\kappa}^{u} = Q_1^u \delta q_1 + Q_2^u \delta q_2 + \ldots + Q_s^u \delta q_s \qquad (191)$$

где $Q_1^u, Q_2^u, ..., Q_s^u$ - обобщенные силы инерции, которые согласно формулам (179) имеют вид:

$$Q_1^u = \sum \overline{F}_{\text{к}}^{u} \cdot \frac{\partial \overline{r}_{\text{к}}}{dq_1},\ Q_2^u = \sum \overline{F}_{\kappa}^{u} \cdot \frac{\partial \overline{r}_{\kappa}}{dq_2} \qquad (192)$$

Подставив (189) и (191) в (190), получим:

$$(Q_1 + Q_1^u)\delta q_1 + (Q_2 + Q_2^u)\delta q_2 + \ldots + (\mathrm{Q_s} + Q_s^u)\delta q_s = 0 \qquad (193)$$

Полученное уравнение справедливо, если:

$$Q_1 + Q_1^u = 0,\ Q_2 + Q_2^u = 0,\ \mathrm{Q_s} + Q_s^u = 0 \qquad (194)$$

так как все $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ между собой независимы.

Уравнения (194) можно использовать для решения задач динамики. Но составление этих уравнений можно упростить, если выразить силы инерции через кинетическую энергию системы.

Так как $\overline{F}_{\kappa}^{u} = -m_{\kappa}\overline{a}_{\kappa} = -m_{\kappa}\dfrac{d\overline{\upsilon}_{\kappa}}{dt}$, то:

$$-Q_1^u = \sum m_{\kappa} \frac{d\overline{\upsilon}_{\kappa}}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_{\kappa}}{\partial q_1} \qquad (195)$$

Чтобы выразить Q_1^u через кинетическую энергию системы, надо преобразовать правую часть равенства (195) так, чтобы она содеожала скорости υ_{κ} точек системы. Математические преобразования дают следующий результат:

$$-Q_1^u = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum \frac{m_\kappa \upsilon_\kappa^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum \frac{m_\kappa \upsilon_\kappa^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q},$$

где $T = \sum m_\kappa \frac{\upsilon_\kappa^2}{2}$ - кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получатся для всех остальных обобщенных сил инерций. В результате равенства (194) дадут окончательно:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \end{aligned} \tag{196}$$

Это и есть дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнениях Лагранжа.

Число уравнений Лагранжа определяется числом степеней свободы системы. Эти уравнения позволяют заранее исключить неизвестные силы реакции.

Если на механическую систему действуют потенциальные силы, то используя формулы (184), можно уравнения (196) представить в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1}\right] - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_1} = 0$$

Если ввести функцию $L=T\text{-}П$, называемую (197) функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом, то в случае потенциальных сил уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0,
\end{aligned} \tag{198}$$

Уравнения Лагранжа дают единый и достатчно простой метод решения задач не только в динамике, но и в ряде областей физики (непрерывные среды, гравитационные и электромагнитные поля и др.).

Задача. 1. Тонкий однородный стержень, длиной l с ползунами на концах скользит под действием силы тяжести по направляющим (рис. 201), которые образуют прямой угол. Пренебрегая массой ползуна и силами трения составить дифференциальное уравнение движения стержня.

Решение. Так как стержень имеет одну степень свободы, то его положение будет определяться одной обобщенной координатой – углом φ (рис. 201). Кинетическую энергию T стержня вычисляем по формуле:

$$T=\frac{1}{2}m\upsilon_c^2+\frac{1}{2}J_c\dot{\varphi}^2, \tag{a}$$

где m – масса стержня, υ_c - скорость центра масс C, $J_c=\frac{1}{12}ml^2$ - момент инерции стержня.

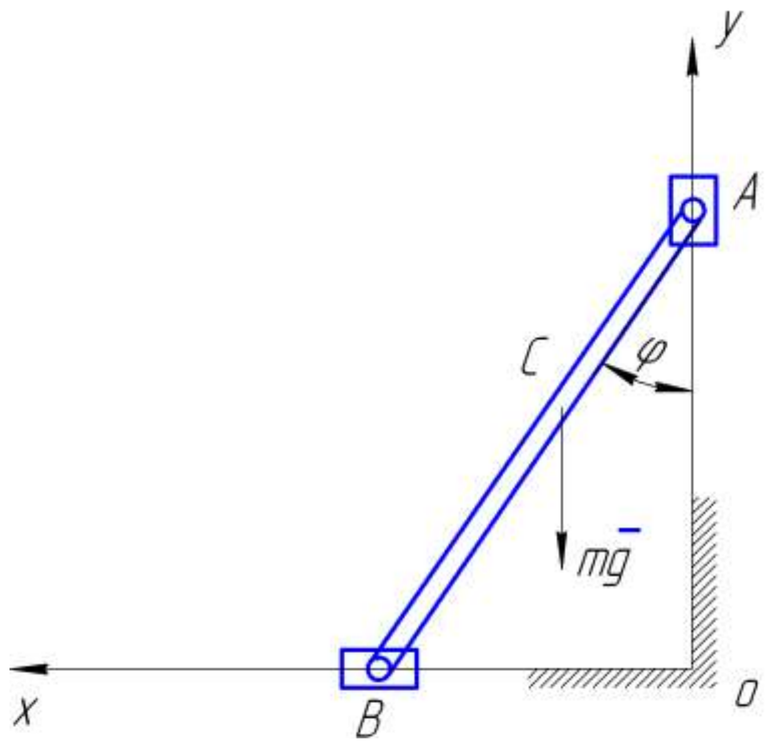


Рис.201

Определим скорость υ_c через координаты точки C.

$$x_c = \frac{1}{2} l \sin\varphi, \; y_c = \frac{1}{2} l \cos\varphi$$

Дифференцируя по времени, получим:

$$\dot{x}_c = \frac{1}{2} l \dot{\varphi} \cos\varphi, \; \dot{y}_c = -\frac{1}{2} l \dot{\varphi} \sin\varphi$$

Отсюда:

$$\upsilon_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 = \frac{1}{4} l^2 \dot{\varphi}^2$$

Подставив значения υ_c^2 и Y_c в (а), получим:

$$T=\frac{1}{2}m\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{12} \text{ или}$$

$$T=\frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2$$

Для определения обобщенной силы надо найти выражение потенциальной энергии, считая, что при горизонтальном положении стержня она принимает нулевое значение:

$$\varPi=\frac{1}{2}mgl\cos\varphi \tag{б}$$

Обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате φ:

$$Q=-\frac{\partial \varPi}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}mgl\sin\varphi$$

Применяя уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q \text{ и вычисляя значения:}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}\,,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi})=\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} \tag{в}$$

Кинетическая энергия T от угла φ не зависит, то

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0$$

Подставив полученные результаты в уравнение Лагранжа, получим:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}=\frac{1}{2}mgl\sin\varphi \text{ или } \ddot{\varphi}=\frac{3g\sin\varphi}{2l}$$

13 ТЕОРИЯ УДАРА

13.1 Основное уравнение теории удара

Ударом называется взаимодействие точек тела за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени, при котором скорости точек тела изменяются на конечную величину.

Силы, при действии которых происходит удар, называются *ударными силами* $\overline{F}_{уд}$.

Время удара – промежуток времени τ, в течении, которого происходит удар.

В теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривается ударный импульс:

$$\overline{S}_{уд} = \int_0^{\tau} \overline{F}_{уд} dt = \overline{F}_{уд}^{ср} \tau$$

Если обозначить скорость точки в начале удара $\bar{\upsilon}$, а в конце удара через $\bar{u}$, то теорема об изменении количества движения точки при ударе будет:

$$m(\bar{u} - \bar{\upsilon}) = \sum \overline{S}_к \qquad (199)$$

Изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов.

Уравнение (199) есть основное уравнение теории удара. При ударе точка перемещается за время удара на очень малую величину, равную $\upsilon_{ср}\tau$, котрой практически можно пренебречь.

Итак, при ударе считается:

1. действием неударных сил (например, силой тяжести) за время удара можно пренебречь;

2. перемещением точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

3. изменение скоростей точек тела за время удара определяется основным уравнением теории удара

13.2 Общие теоремы теории удара

При ударе общие теоремы динамики принимают вид:

1. Теорема об изменении количесвта движения системы при ударе:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_{\text{к}}^{\text{e}} \tag{200}$$

Изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.

В проекциях на любую координату ось x уравнение (200) дает:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{\text{кх}}^{\text{e}} \tag{200*}$$

Если $\sum \overline{S}_{\text{кх}}^{\text{e}} = 0$, то количество движения системы за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения всей системы.

2. Теорема об изменении главного момента количества, движения системы (теорема моментов) при ударе:

$$\overline{K}_1 - \overline{K}_0 = \sum \overline{m}_0(\overline{S}_{\kappa}^{e}) \tag{201}$$

Теорема моментов при ударе отличается от теоремы об изменении главного момента количеств движения системы за счет того, что за время удара точки системы не перемещаются и читается так: изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-нибудь центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов.

В проекциях на ось x равенство (201) даст:

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum \overline{m}_x(\overline{S}_к^е) \tag{201}$$

Если $\sum m_x(\overline{S}_к^е) = 0$, то главный момент количеств движения системы за время удара не изменяется.

13.3 Коэффициент восстановления при ударе

Значение ударного импульса, зависящего от упругих свойств соударяющихся тел называется *коэффициентом восстановления.*

Рассмотрим шар, падающий венртикально на неподвижную горизонтальную жесткую плиту (рис.202). Рассмотрим прямой удар, который включает в себе две стадии. В течение первой стадии шар деформируется, и его начальная кинетическая энергия $\frac{m\upsilon^2}{2}$ переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформированного тела.

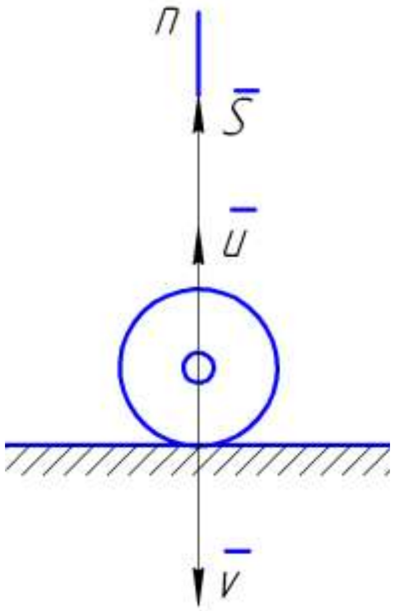


Рис.202

При этом скорости частиц шара (шар падает постуательно), равные в момент начала удара υ убывают до нуля. Во второй стадии удара шар под действием сил упругости начинает счет перехода внутренней потенциальной энергии в кинетическую энергию движения частиц будет U, а кинетическая энергия шара $\frac{mu^2}{2}$. Полностью механическая энергия не восстанавливается, так как часть её уходит на нагревание и остаточные деформации. Поэтому скорость u меньше υ. Величина $k = \frac{u}{\upsilon}$ при прямом ударе о неподвижную преграду называется *коэффициентом восстановления при ударе*:

$$k = \frac{u}{\upsilon} \tag{202}$$

Значение коэффициента восстановления для разных тел можно определить опытным путем. Если скорость υ изменяется не в очень больших пределах, то коэффициент k считается зависимой только от материала соударяющихся тел.

Предельным случаем удара $(k = 1)$ является *абсолютно упругий удар*. Здесь кинетическая энергия тела после удара полностью восстанавливается.

И рассматривается случай *абсолютно неупругого удара* $(k = 0)$, когда удар заканчивается в первой стадии и вся кинетическая энергия тела расходуется на его деформацию и нагревание (рис.203).

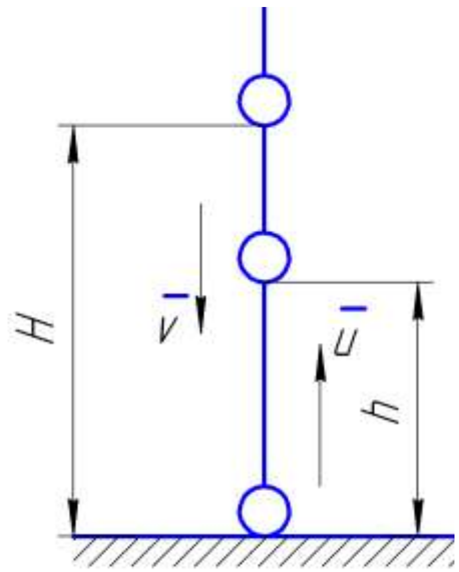


Рис.203

Экспериментально величину k определяют, рассматривая шар, который свободно падает на горизонтальную плиту с известной высоты H, а затем замеряют с помощью рейки высоту подъема h после удара.

По формуле Галилея $\upsilon = \sqrt{2gH}$ и $u = \sqrt{2gh}$ имеем $k = \dfrac{u}{\upsilon} = \sqrt{\dfrac{h}{H}}$. Значения коэффициентов для некоторых из них приведены в нижеследующей таблице при коростях соударения порядка 3 м/с.

№ п/п	Название материала	Значение k
1	Дерево о дерево	0,5
2	Сталь о сталь	0,56
3	Слоновая кость о слоновую кость	0,89
4	Стекло о стекло	0,94

13.4 Удар тела о неподвижную преграду

Пусть шар массой M ударяется о неподвижню плиту. Ударной силой будет реакция плиты и импульсом этой силы за время удара назовем $\bar{S}$. Тогда нормаль к поверхности тела в точке касания с плитой проходит через центр масс тела. Такой удар тела называеться *центральным*. Если скорость $\bar{\upsilon}$ центра масс тела в начале удара направлена по нормали n к плите, то удар будет прямым (рис. 203). В противном случае – косым.

1. ПРЯМОЙ УДАР

Согласно уравнению $\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_{\text{к}}^{\text{е}}$ в проекции на нормаль n с учетом, что $\overline{Q}_1 = M\overline{u}$, получим:

$$M(u_n - \upsilon_n) = S_n$$

Но при прямом ударе $u_n = u$, $\upsilon_n = -\upsilon$, $S_n = S$. Тогда:

$$M(u+\upsilon) = S$$

Из (202) следует, что $u = k\upsilon$ и можно найти S:

$$S = M(1+k)\upsilon \qquad (203)$$

Чем больше коэффициент восстановления k тем больше ударный импульс. А чтобы определить величину ударной силы (реакции), надо знать время удара τ.

2. КОСОЙ УДАР

В этом случае скорость $\bar{\upsilon}$ с нормалью образует угол α, а скорость $\bar{u}$ в конце удара угол β (рис. 204).

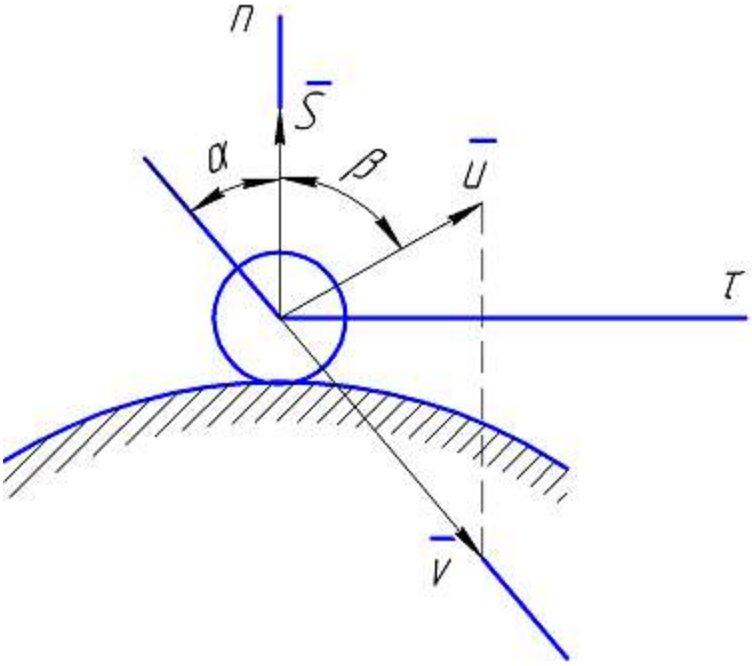


Рис.204

Тогда уравнение $\overline{Q_1} - \overline{Q_0} = \sum \overline{S}_к^е$ в проекциях на нормаль n дает:

$M(u_n - \upsilon_n) = S$, а на касательную τ будет:

$$M(u_\tau - \upsilon_\tau) = 0$$

С учетом знаков проекций имеем:

$$u_n = -k\upsilon_n$$

Тогда окончательно имеем:

$$u_\tau = \upsilon_\tau\,,\; u_n = -k\upsilon_n\,,\; S = M\left|\upsilon_n\right|(1+k) \tag{204}$$

13.5 Прямой центральный удар двух тел (удар шаров)

Удар двух тел (рис.205) называется прямым и центральным, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс.

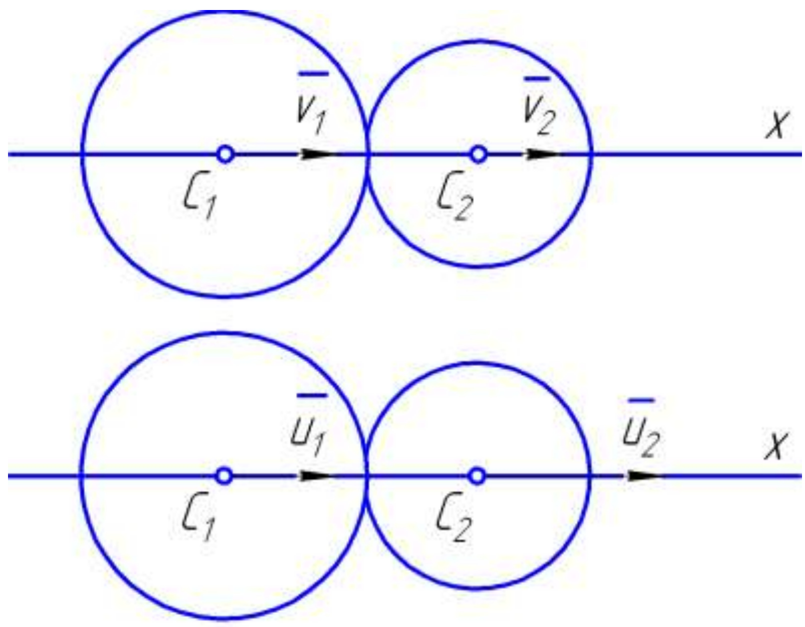


Рис.205

Если M_1 и M_2 массы шаров, υ_1 и υ_2 скорости шаров в начале удара, u_1 и u_2 - скорости в конце удара, то для удара необходимо $\upsilon_{1x} > \upsilon_{2x}$ и $u_{1x} \le u_{2x}$ так как ударевшее тело не может опередить ударяемое.

Определим υ_{1x} и υ_{2x}, если известны M_1, M_2, υ_{1x} , υ_{2x} и k .

Для этого применим теорему об изменении количества движения. Ударными силами будут только внутренними и $\sum \bar{S}_{к}^{e} = 0$. В результате уравнение:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{к}^{e} \text{ дает } Q_{1x} = Q_{0x} \text{ или}$$

$$M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} = M_1 \upsilon_{1x} + M_2 \upsilon_{2x} \tag{205}$$

Второе уравнение найдется из выражения для коэффициента восстановления:

$$k = \left| \frac{u_{1x} - u_{2x}}{\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}} \right| = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}} \tag{206}$$

или

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}) \tag{206*}$$

А ударный импульс, действующий на соударяющие тела будет:

$$S_{1x} = M_1(u_{1x} - \upsilon_{1x}),\ S_{2x} = -S_{1x} \tag{207}$$

Рассмотрим предельные случаи:

1. Абсолютно неупругий удар $(k=0)$. В этом случае из уравнения (206) имеем:

$$u_{1x}=u_{2x}=\frac{M_1\upsilon_{1x}+M_2\upsilon_{2x}}{M_1+M_2} \qquad (208)$$

Оба шара после удара движутся с одной и той же скоростью. И ударный импульс будет:

$$S_{2x}=-S_{1x}=\frac{M_1+M_2}{M_1+M_2}(\upsilon_{1x}-\upsilon_{2x})$$

2. Абсолютно упругий удар $(k=1)$. В этом случае:

$$\begin{aligned} u_{1x}&=\upsilon_{1x}-\frac{2M_2}{M_1+M_2}(\upsilon_{1x}-\upsilon_{2x})\\ u_{2x}&=\upsilon_{2x}+\frac{2M_1}{M_1+M_2}(\upsilon_{1x}-\upsilon_{2x}) \end{aligned} \qquad (209)$$

Ударный импульс будет:

$$S_{2x}=-S_{1x}=\frac{2M_1+M_2}{M_1+M_2}(\upsilon_{1x}-\upsilon_{2x})$$

При абсолютноупругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом.

Если $M_1=M_2$, то:

$$u_{1x}=\upsilon_{2x},\ u_{2x}=\upsilon_{1x}$$

Два тела одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

13.6 Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел. Теорема Карно

При неупругом ударе происходит потеря кинетической энергии соударяющихся тел. Подсчитаем при абсолютно упругом ударе эту потерю.

Допустим, что соударяющие тела движутся поступательно и их общая скорость после абсолютно неупругого удара будет *u*. Тогда, кинетическая энергия всей системы в начале и конце удара имеет значение:

$$T_0 = \frac{M_1 \upsilon_{1x}^2}{2} + \frac{M_2 \upsilon_{2x}^2}{2}, \; T_1 = \frac{(M_1 + M_2) u_x^2}{2} \qquad (210)$$

Очевидно, что $T_0 - T_1$ - потерянная кинетическая энергшия при ударе. Представим эту разность в виде $T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1$.

Так как из формулы (208) следует, что:

$(M_1 + M_2) u_x = M_1 \upsilon_{1x} + M_2 \upsilon_{2x}$, то отсюда:

$$2T_1 = (M_1 + M_2) u_x^2 = (M_1 \upsilon_{1x} + M_2 \upsilon_{2x}) u_x \qquad (211)$$

Подставляя сюда значения T_0, T_1 и $2T_1$, получим:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 (\upsilon_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (\upsilon_{2x} - u_x)^2 \qquad (212)$$

Разности $(\upsilon_{1x} - u_x)$ и $(\upsilon_{2x} - u_x)$ показывают уменьшение при ударе скоростей каждого из соударяющихся тел. Их называют *потерянными при ударе скоростями*. Тогда из (212) вытекает теорема Карно: кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы уу тела двигались с потерянными скоростями.

Если удар не является абсолютно неупругим $(k \neq 0)$, то кинетическая энергия, потерянная при ударе двух тел, будет:

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}M_1(\upsilon_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}M_2(\upsilon_{2x} - u_x)^2\right] \quad (213)$$

Рассмотрим абсолютно неупругий удар по первоначально неподвижному телу. Это случай, когда $\upsilon_2 = 0$.

$$T_0 = \frac{1}{2}M_1\upsilon_1^{\ 2},\ u = \frac{M_1\upsilon_1}{M_1 + M_2}.$$

Тогда:

$$T_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}T_0 \quad (214)$$

Такая энергия осталась у тела после удара.

Предельные случаи:

1. Масса ударяющего тела много больше массы ударяемого *($M_1 >> M_2$)*.

В этом случае можно считать $M_1 + M_2 \approx M_1$, из формулы (214) дает $T_1 \approx T_0$. Хоть удар и является абсолютно неупругим, потери кинетической энергии не происходит.

На практике такие удары происходят при забивании гвоздей, свай и т.д.

2. Масса ударяемого тела много больше массы ударяющего *($M_2 >> M_1$)*.

В этом случае можно считать $\frac{M_1}{M_1 + M_2} \approx 0$, и формула (214) дает $T_2 \approx 0$. При таком ударе вся кинетическая энергия расходуется на деформацию соударяющихся тел. После удара тела остаются неподвижными.

Такой результат можно получить при ковке, клепке и т.п.

13.7 Удар по вращающемуся телу

Пусть в некоторый момент к телу, имеющему ось вращения z (рис. 206), приложен ударный импульс $\bar{S}$.

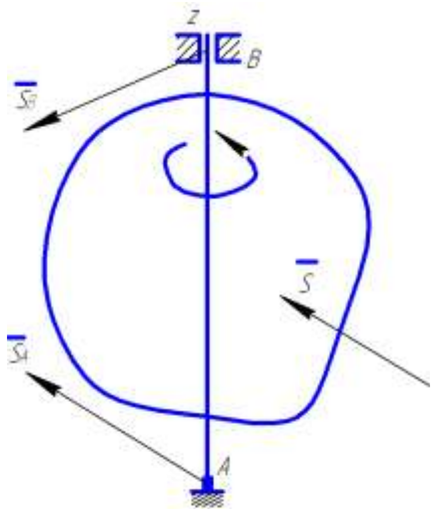


Рис.206

Тогда согласно уравнению (201*) имеем:

$K_{1z} - K_{0z} = m_z(\bar{S})$, потому что моменты импульсивных реакций $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$, возникающих в подшипниках, относительно оси z равны нулю, и где:

$$K_{0z} = J_z \omega_\upsilon , \quad K_{1z} = J_z \omega_u ,$$

где ω_υ - угловая скорость тела в начале удара;

ω_u - угловая скорость тела в конце удара.

Окончательно получим:

$$J_z(\omega_u - \omega_\upsilon) = m_z(\bar{S}) \text{ или } \omega_u = \omega_\upsilon + \frac{m_z(\bar{S})}{J_z} \qquad (215)$$

Угловая скорость тела за время удара изменяется на величину, равную отношению момента ударного импульса к моменту инерции тела относительно оси вращения.

13.8 Импульсивные реакции

Определим импульсивные реакции подпятника A и подшипника B. Проведем оси A_{xyz}, так чтобы центр масс C лежал в плоскости A_{yz} (рис.207). Пусть AB=$в$. Расстояние точки C до оси z равно a.

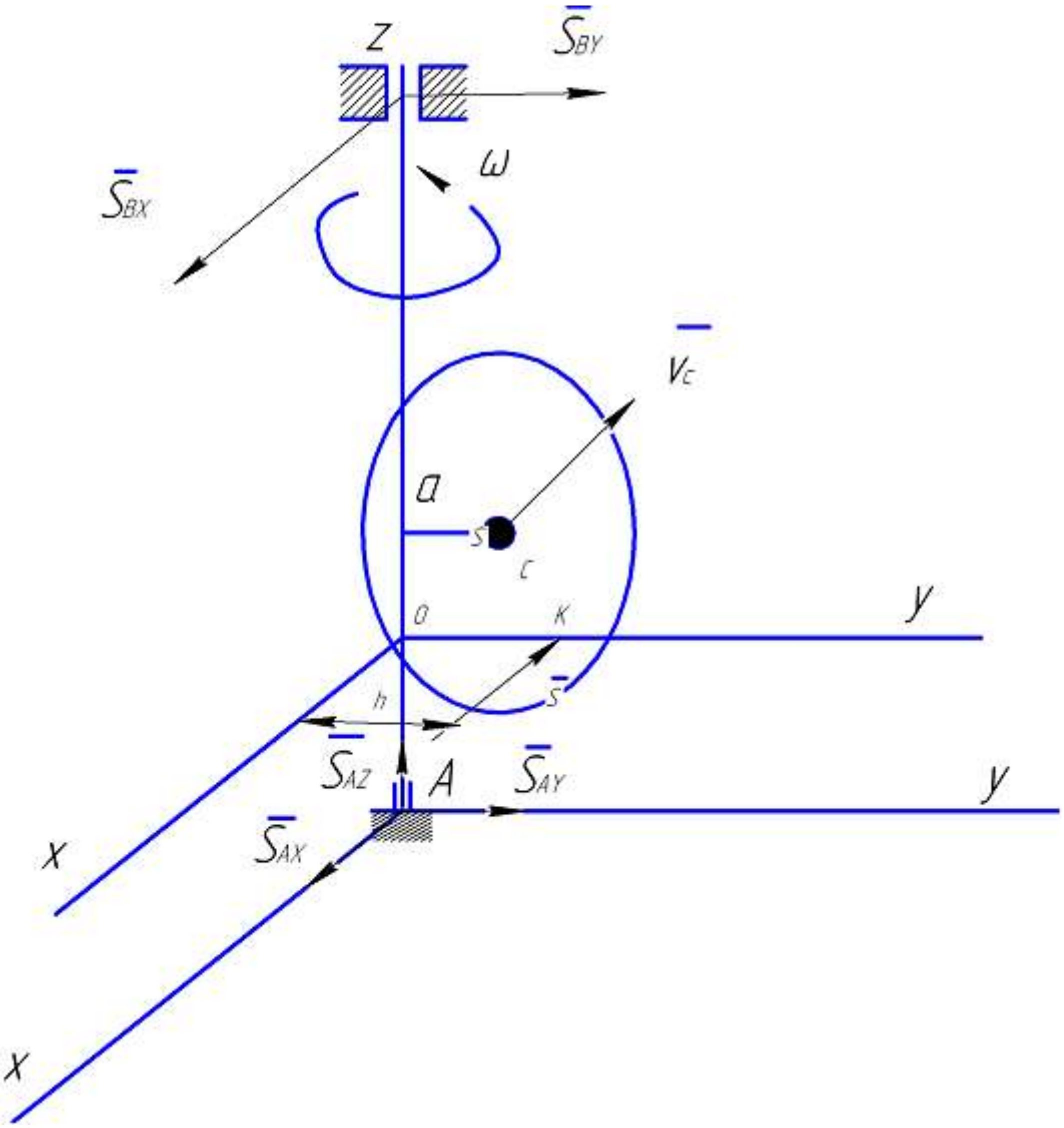


Рис.207

Составим уравнения на три оси. $Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S^e_{кx}$, учитывая, что векторы $\bar{\upsilon}_c$ и $\bar{u}_c$ будут параллельны оси A_x. Тогда:

$Q_{0x} = -M\upsilon_c = -Ma\omega$, $Q_{1x} = -Ma\omega_u$, $Q_y = Q_z = 0$. Уравнение в проекции на ось z уже имеем: уравнение (215).

Остальные будут:

$$
\begin{aligned}
&-Ma(\omega_u-\omega)=S_{Ax}+S_{Bx}+S_x\\
&0=S_{Ay}+S_{By}+S_y\\
&0=S_{Az}+S_z\\
&-J_{xz}(\omega_u-\omega)=-S_{By}в+m_x(\bar{S})\\
&-J_{yz}(\omega_u-\omega)=-S_{Bx}в+m_y(\bar{S})
\end{aligned}
\qquad (216)
$$

Разность $\omega_u-\omega$ определяется из (215)

13.9 Центр удара

Появление при ударе импульсных реакций приводит к износу или разрушению подшипников, валов и т.п.

Чтобы при ударе по телу, закрепленному на оси z, в подшипниках не возникало импульсивных реакций, надо:

1. что бы ударный импульс был расположен в плоскости o_{xy}, перпендикулярной оси z и проходящей через такую точку O тела, для которой ось z является главной осью инерции;

2. что бы удар был направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения z и центр масс C тела;

3. что бы ударный импульс был приложен на расстоянии: $h=\dfrac{J_z}{Ma}$ от оси (по ту сторону от оси, где находится центр масс).

Точка *K*, через которую при этом будет проходить ударный импульс, не вызывающий ударных реакций в точках закрепления оси, называется *центром удара*.

Поэтому центр удара совпадает с центром качаний физического маятника.

Например, при ударе палкой, чтобы не отбить руку (рис. 208), надо ударять тем местом, котороепо отношению к руке будет центром удара.

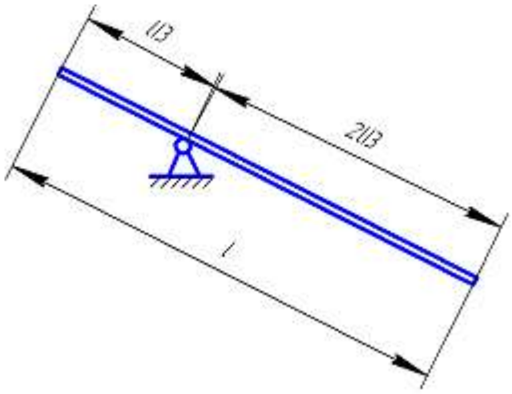


Рис.208

Если палку считать однородным стержнем длиной *l*, а ось вращения совпадающей с его концом, то:

$$Y_z = \frac{Ml^2}{3},\ h = \frac{J_z}{Ma} = \frac{2l}{3}$$

Следовательно, удар палкой надо производить тем местом стержня, который находится на расстоянии $\frac{2l}{3}$ от руки.

Задача. Шарик вертикально падает о неподвижную наклонную плоскость, расположенную под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту (рис. 209). Коэффициент восстановления $k = 0.7$. Определить угол отскока шарика. Шарик и плоскость считать гладкими.

Решение. Направим ось τ вдоль наклонной плоскости. Угол α - угол падения. Угол β - угол отражения. Определим проекции скорости $\bar{\upsilon}$ в начале удара на оси n и τ:

$$\upsilon_n = \upsilon \cdot \cos\alpha,\ \upsilon_\tau = \upsilon \cdot \sin\alpha \qquad (1)$$

Мгновенной силой будет одна сила – реакция наклонной плоскости. Ударный импульс $\bar{S}$ этой реакции при отсутствии силы трения направлен перпендикулярно к плоскости. Для решения задачи воспользуемся уравнением:

$$m\bar{u} - m\bar{\upsilon} = \bar{S} \qquad (2)$$

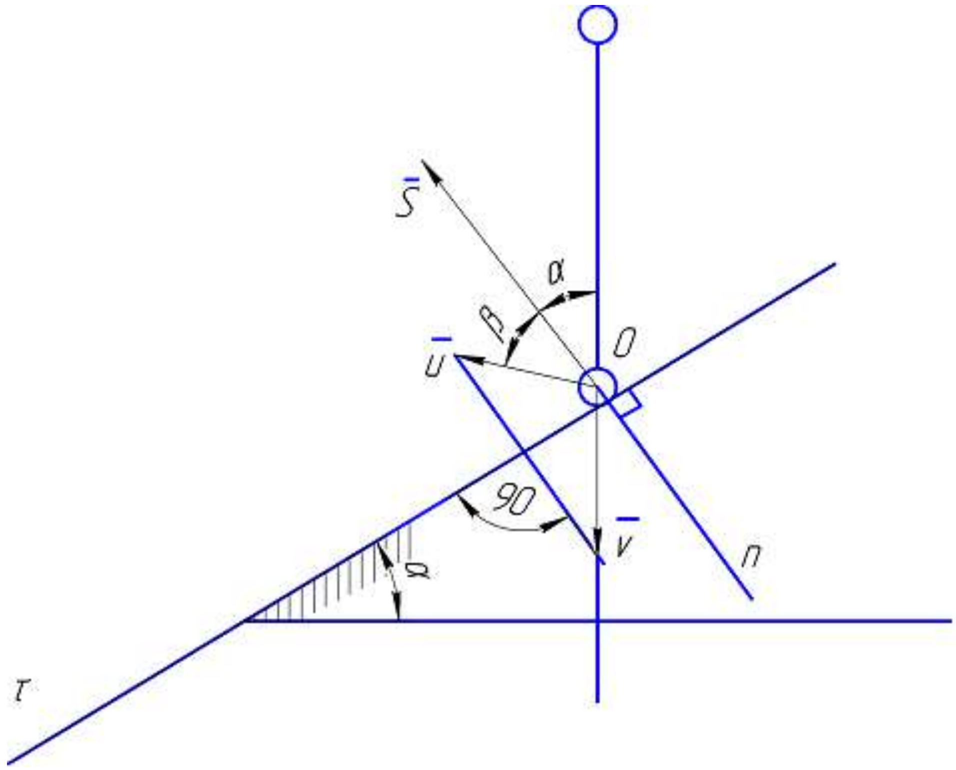


Рис.209

где m - масса шарика, $\bar{u}$ - скорость шарика в конце удара.

Спроекцируем уравнение (2) на ось τ:

$$mu_\tau - m\upsilon_\tau = 0,\ \text{откуда}\ u_\tau = \upsilon_\tau$$

Согласно формуле (1) $\upsilon_\tau = \upsilon \cdot \sin\alpha$ имеем:

$$u_\tau = \upsilon_\tau = \upsilon \sin\alpha \qquad (3)$$

Согласно уравнению (204) $u_n = -k\upsilon_n$, определим $u_n = -k\upsilon \cdot \cos\alpha$.

Из (рис. 82) видно, что $tg\beta = \dfrac{|u_\tau|}{|u_n|}$. Подставив сюда (3) и (4), получим: $\beta = 39.5^0$

14 МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

14.1 Понятие об устойчивости равновесия

Равновесие системы называется *устойчивым*, если ее можно вывести из этого положениямалым вщзмущением (толчком, смещением).

Например, равновесие маятника (рис. 210) при $\varphi = 0$ будет устойчивым, а при $\varphi = 180^0$ - неустойчивым.

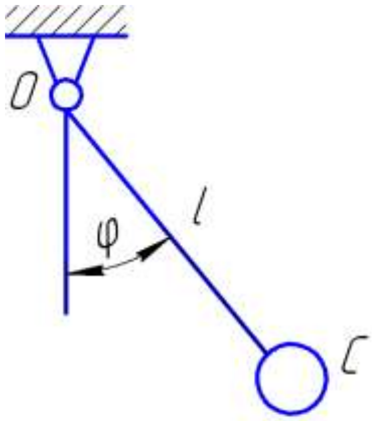


Рис. 210

Такое определение соответствует понятию об устойчивости равновесия и движения по А.М. Ляпунову.

Теорема Лагранжа- Дирихле дает достаточное условие устойчивости равновесия консервативной системы: если потенциальная энергия консервативной системы имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым. Для случая равновесия консервативной системы, имеющей одну степень свободы должно выполняться:

$$(\frac{\partial П}{\partial q})_0 = 0, \ (\frac{\partial^2 П}{\partial q^2})_0 > 0 \qquad (217)$$

Т.е. равновесие системы в данном положении $(q=0)$ будет устойчивым.

14.2 Малые свободные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим механическую систему (консервативную), состоящую из n материальных точек и имеющуюся в положении устойчивого равновесия. Выведем ее из равновесия малым возмущением и будем ее положение определять обобщенной координатой q , выбранной так, что при равновесии $q=0$. Так как равновесие устойчиво, а возмущения малы, то координата q и скорость $\dot{q}$ будут величинами малыми.

Для составления дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial \Pi}{\partial q}=0 \tag{218}$$

Из-за малости величин q и $\dot{q}$ уравнения (218) можно сделать линейным с точностью до малых величин второго порядка малости.

Разлагая функцию $\Pi(q)$ в ряд Тейлора, найдем:

$$\Pi(q)=\Pi(0)+\frac{1}{2}cq^2\text{, где } c=\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 \tag{219}$$

где c- квазиупругий коэффициент или обогащенный коэффициент жесткости.

Из предыдущих равенств находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=a\dot{q},\ \frac{\partial T}{\partial q}=0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial q}=cq \tag{220}$$

Подставив (220) в (218), получим дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \text{ где } k^2 = \frac{c}{a} \qquad (221)$$

где a – инерционный коэффициент. Его размерность зависит от размерности $\dot{q}$ (может быть размерность ассы или момента инерции).

Уравнение (221) совпадает с уравнением свободных прямолинейных колебаний материальной точки (50).

Общее решение уравнения (221):

$$q = A\sin(kt + \alpha) \qquad (222)$$

где A и α - постоянные интегрирования

Частота вращения k и период τ этих колебаний будут:

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}},\ \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} \qquad (223)$$

Точки механической системы тоже совершают малые колебания с частотой k и амплитудами $A\left|\bar{r}_{к}^{1}(0)\right|$, где $\bar{r}_{к}(q)$ - радиус- вектор одной из точек системы.

Из полученных результатов следуют свойства малых колебаний системы:

1. свободные (собственные) колебания системы являются колебаниями гармоническими. Частота и период этих колебаний не зависят от начальных условий;

2. постоянные A и α зависят от начальных условий и амплитуды колебаний точек системы, равные $A\left|\bar{r}_{к}^{1}(0)\right|$, и начальная фаза α тоже зависят от начальных условий;

3. отношения амплитуд колебаний разных точек системы от начальных условий не зависят, так как определяются только значениями $\bar{r}_{\kappa}^{1}(0)$, т.е. конфигурацией системы;

4. все точки системы в каждый момент времени находятся в одной и той же фазе $(kt+\alpha)$.

Задача. Механическая система состоит из весомых стержней 1 и 2 и диска 3, связанных невесомыми стержнями *АВ* и *ДЕ* шарнирно.

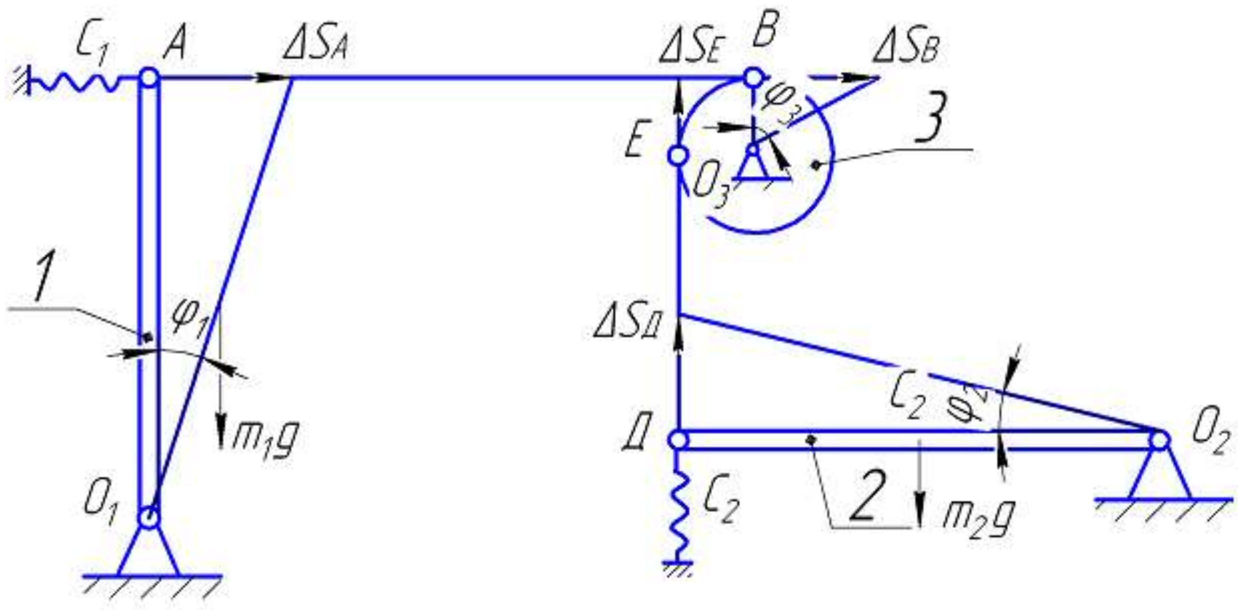


Рис.211

На рис. 211 система находится вравновесии. При этом стержень 1 вертикален и прикрепленная к его концу *А* пружина имеет удлинение λ_{cm}. Стержень λ горизонтален и прикрепленная к его концу *Д* пружина не деформируема. Длины стержней l_1 и l_2, массы - m_1 и m_2, масса диска - m_3, коэффициенты жесткости пружин - c_1 и c_2

Определить: 1) значение λ_{cm}; 2) условие устойчивости равновесия системы; 3) частоту и период ее собственных колебаний.

Решение. Вщзьмем за обобщенную координату малый угол φ_1 отклонения стержня 1 от положения равновесия. При таком положении можно считать $\Delta S_A = \Delta S_B = \Delta S_E = \Delta S_Д$. Следовательно, $l_2\varphi_2 = l_1 \cdot \varphi_1$ и $r_3\varphi_3 = l_1\varphi_1$, где r_3 - радиус диска.

Удлинение горизонтальной пружины будет:

$$\lambda_1 = \lambda_{ст} + \Delta S_A = \lambda_{ст} + l_1 \cdot \varphi_1$$

Удлинение вертикальной пружины: $\lambda_2 = \Delta S_Д = l_2\varphi_2 = l_1 \cdot \varphi_1$.

Тогда потенциальная энергия системы равна:

$$П = m_1 g \frac{l_1}{2}\cos\varphi_1 + m_2 g \frac{l_2}{2}\sin\varphi_2 + \frac{c_1}{2}(\lambda_{ст} + l_1\varphi_1)^2 + \frac{c_2}{2} l_2^2\varphi_2^2$$

Полагая $\cos\varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}$, $\sin\varphi_2 = \varphi_2$ и, учитывая, что $l_2\varphi_2 = l_1\varphi_1$, получим: $П = П_0 + (m_2 g + 2c_1\lambda_{ст})\frac{l_1}{2}\varphi_1 + \left[2(c_1 + c_2)l_1 - m_1 g\right]\frac{l_1}{4}\varphi_1^2$. $П_0$ - все величины постоянны. Тогда:

$$\frac{\partial П}{\partial \varphi_1} = (m_2 g + 2c_1\lambda_{ст})\frac{l_1}{2} + \left[2(c_1 + c_2)l_1 - m_1 g\right]\frac{l_1}{2}\varphi_1.$$

В положении равновесия, т.е. при $\varphi_1 = 0$, эта производная равна нулю. Следовательно:

$$m_2 g + 2c_1\lambda_{ст} = 0 \text{ или } \lambda_{ст} = -\frac{m_2 g}{2c_1}. \qquad \text{(a)}$$

$$U\frac{\partial_2 П}{\partial \varphi_1^2} = \left[2(c_1 + c_2)l_1 - m_1 g\right]\frac{l_1}{2}$$

Согласно уравнению (217) равновесие будет устойчивым, если:

$$2(c_1 + c_2)l_1 > m_1 g \tag{б}$$

Квазиупругий коэффициент C будет равняться:

$$C = \left[2(c_1 + c_2)l_1 - m_1 g\right]\frac{l_1}{2} \tag{в}$$

Кинетическая энергия системы будет:

$$T = \frac{1}{2}(\frac{m_1}{3}l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{3}l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{m_3}{2}r_3^2\dot{\varphi}_3^2,$$

где $\frac{m_1 l_1^2}{3}$, $\frac{m_2 l_2}{3}$, $\frac{m_3 r_3^2}{2}$ - моменты инерции тел 1, 2, 3

Поскольку $l_2\dot{\varphi}_2 = l_1\dot{\varphi}_1$ и $r_3\dot{\varphi}_3 = l_1\dot{\varphi}_1$, получим:

$$\text{T} = \frac{1}{2}(\frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{3} + \frac{m_3}{2})l_1^2\dot{\varphi}_1^2 \text{ и } a = (2m_1 + 2m_2 + 3m_3)\frac{l_1^2}{6} \tag{г}$$

Тогда $k = \sqrt{\dfrac{6(c_1 + c_2)l_1 - 3m_1 g}{(2m_1 + 2m_2 + 3m_3)l_1}}$, $\tau = \dfrac{2\pi}{k}$

14.3 Малые затухающие и вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

1. Затухающие колебания

Рассмотрим механическую систему, которая при $q = 0$ находится в положении устойчивого равновесия. Пусть на точки системы, когда она выведена из равновесного положения, кроме потенциальных сил начинают действовать еще силы вязкого сопротивления (диссипативные силы):

$$\overline{F}_к = -\mu_к \overline{\upsilon}_к = -\mu_к \left(\frac{d\overline{r}_к}{dq} \right) \dot{q} \,.$$

Эти силы на условие устойчивости равновесия не влияют, так как при равновесии $\overline{\upsilon}_к = 0$ и тогда $\overline{F}_к = 0$.

Обобщенную силу вязкого вязкого сопротивления можно найти по формуле:

$$Q = \sum \overline{F}_к \cdot \frac{\partial \overline{r}_к}{\partial q_1}$$

Преобразовав это выражение, получим:

$$Q_{con} = -\mu \dot{q} \quad (\mu = const) \tag{224}$$

Составляя уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial П}{\partial q} = Q_{con} \tag{225}$$

Заменив *T, П,* Q_{con} их значениями, получим:

$$\ddot{q} + 2в\dot{q} + k^2 q = 0 \tag{226}$$

где $\frac{\mu}{a} = 2в$, $\frac{c}{a} = k^2$ (226*)

Уравнение (226) совпадает с уравнением (53). Следовательно, для малых колебаний системы с одной степенью свободы имеют место результаты, полученные для точки.

Таким образом:

а) при $k > в$ система совершает затухающие колебания с частотой:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - в^2} \text{ и периодом } \tau = \frac{2\pi}{k_1};$$

б) при $k \leq в$ система совершает неколебательное движении.

2. Вынужденные колебания

Пусть на систему, находящуюся в положении устойчивого равновесия кроме, потенциальных, диссипативных сил, действуют еще возмущающиме силы, изменяющие со временем по закону:

$$\overline{F}_к = \overline{F}_{ко} \sin \rho t$$

Тогда обобщенная возмущающаяся сила будет:

$$Q_B = Q_0 \sin \rho t \tag{227}$$

Подставив в правую часть уравнения Лагранжа (225) полуцчим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы:

$$\ddot{q} + 2в\dot{q} + k^2 q = H_0 \sin \rho t \tag{228}$$

где $H_0 = \dfrac{Q_0}{a}$

Уравнение (228) совпадает с уравнением (63). Следовательно, все результаты, полученные для точки, применимы и для малых колебаний системы с одной степенью свободы. В частности, резонанс при малом сопротивлении тоже будет иметь место, если $\rho \approx k$.

14.4 Малые свободные колебания системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим случай свободных колебаний с двумя степенями свободы, положение которой определяется обобщенными координатами q_1, q_2 и при $q_1 = q_2 = 0$ система находится в устойчивом равновесии. Тогда кинетическая и потенциальная энергия системы можно представить в виде:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2) \tag{229}$$

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2) \tag{230}$$

где инерционные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} и квазиупругие коэффициенты c_{11}, c_{12}, c_{22} – величины постоянные.

Воспользовавшись уравнением Лагранжа (218) и подставив в него значения (229) и (230), получим дифференциальные уравнения малых колебаний системы с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0 \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0 \end{aligned} \tag{231}$$

Найдем решения уравнения (231) в виде:

$$q_1 = A\sin(kt + \alpha),\ q_2 = B\sin(kt + \alpha) \tag{232}$$

где A, B, k, α - постоянные величины. Подставив q_1 и q_2 в уравнение (231) и сократив на $\sin(kt+\alpha)$, получим:

$$\begin{aligned}(c_{11}-a_{11}k^2)A+(c_{12}-a_{12}k^2)B=0\\(c_{12}-a_{12}k^2)A+(c_{22}-a_{22}k^2)B=0\end{aligned} \tag{233}$$

Решая уравнение (233), получим (коэффициенты при A и B в уравнении должны быть пропорциональны):

$$\frac{c_{11}-a_{11}k^2}{c_{12}-a_{12}k^2}=-\frac{c_{12}-a_{12}k^2}{c_{22}-a_{22}k^2}=\frac{B}{A}=n \tag{234}$$

Для определения k^2 получаем уравнение, которое называется *уравнением частот:*

$$(c_{11}-a_{11}k^2)(c_{22}-a_{22}k^2)-(c_{12}-a_{12}k^2)^2=0 \tag{235}$$

Корни k_1^2 и k_2^2 этого уравнения вещественные и положительные числа.

Определив k_1 и k_2 можно найти частные решения (232):

$$q_1^{(1)}=A\sin(k_1t+\alpha_1),\ q_2^{(1)}=n_1A_1\sin(k_1t+\alpha_1) \tag{236}$$

$$q_1^{(2)}=A_2\sin(k_2t+\alpha_2),\ q_2^{(2)}=n_2A_2\sin(k_2t+\alpha_2) \tag{237}$$

где n_1 и n_2 - значения, которые n получает из (234) при $k=k_1$ и $k=k_2$ соответственно.

Колебания, определяемые уравнениями (236) и (237), называются *главными колебаниями.*

Частоты k_1 и k_2 - *собственные частоты системы.* Колебание с частотой k_1 называют *первым главным колебанием*, а с частотой k_2 - *вторым главным колебанием.*

Число n_1 и n_2, определяющие отношение амплитуд, называют *коэффициентами формы.*

Так как уравнения (231) линейные, то суммы частных решений (236) и (237) тоже будут решениями этих уравнений:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= n_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + n_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \tag{238}$$

Постоянные A_1, A_2, α_1, α_2 - определяются пол начальным условиям.

Равенства (238) дают общие решения уравнения (231) и определяют *закон малых колебаний системы.*

Эти колебания слагаются из двух главных колебаний с частотами k_1 и k_2 и не являются гармоническими.

Собственные частоты k_1, k_2 и коэффициенты формы n_1, n_2 не зависят от начальных условий и являются основными характеристиками малых колебаний системы.

При вынужденных колебаниях резонанс у такой системы может возникнуть дважды:

при $\rho \approx k_1$ и при $\rho \approx k_2$ (ρ - частота возмущающей силы).

Колебания системы с S степенями свободы будут слагаться из S колебаний с частотами k_1, k_2, …, k_s, которые определяются из уравнения степени S относительно k^2.

Задача. Однородный стержень массы *M* и длины *2l* колеблется вокруг горизонтальной оси Z, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости рисунка. На стержень надето кольцо *A* массы m, которое может скользнуть вдоль стержня под действием силы тяжести. Составить дифференциальные уравнения движения системы. Силой трения пренебречь. Кольцо считать точечной массой (рис.212).

Решение. Материальная система имеет две степени свободы. Ее движение описывается двумя дифференциальными уравнениями.

Возьмем за обобщенные координаты: $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$ (рис. 212)

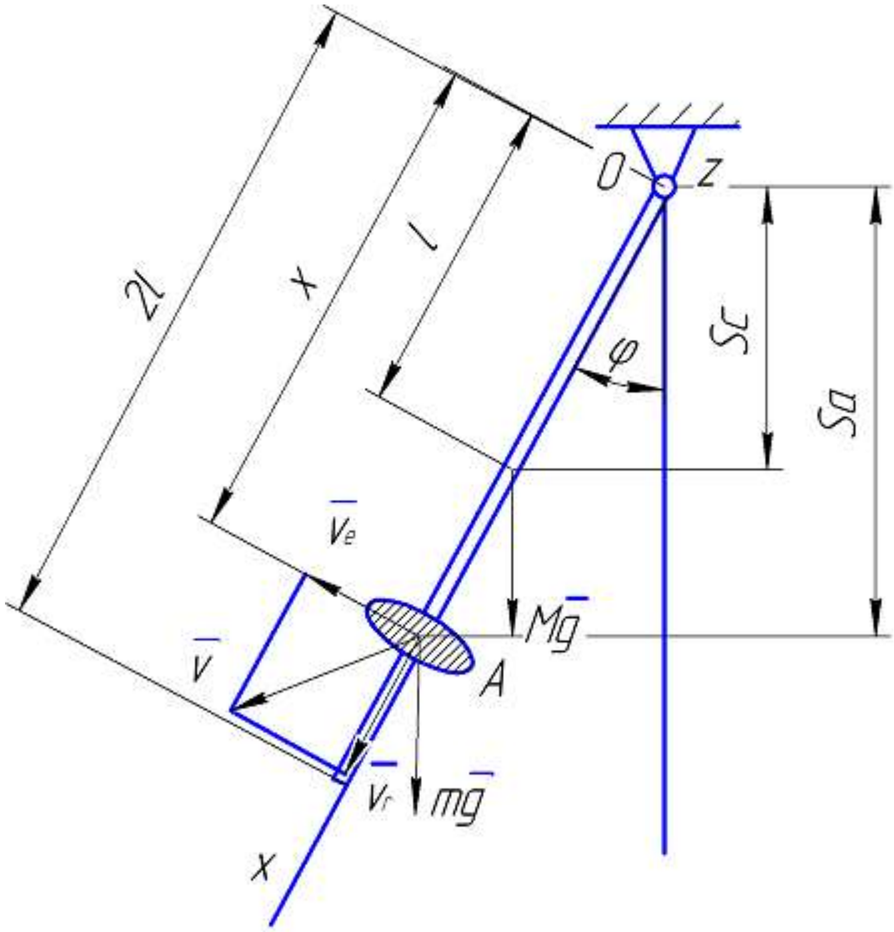


Рис.212

Силы тяжести $M\overline{g}$ и $m\overline{g}$ - потенциальны. Применим уравнения Лагранжа в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \qquad (1)$$

Кинетическая энергия системы стержень- кольцо равна:

$$T = T_{ст} + T_{к}$$

Кинетическая энергия стержня равна:

$$T_{cm} = \frac{1}{2} J_z^{\text{ст}} \dot{\varphi}^2 \text{, где } Y_z^{\text{ст}} = J_{\text{zc}}^{\text{ст}} + Ml^2 = \frac{4}{3} Ml^2 \text{ и тогда:}$$

$$T_{cm} = \frac{2}{3} Ml^2 \varphi^2$$

Кинетическая энергия кольца: $T_\kappa = \frac{1}{2} m\upsilon_A^2$.

Кольцо совершает сложное движение: относительное вдоль стержня и переносное вместе со стержнем.

Применяя теорему о сложении скоростей:

$$\overline{\upsilon}_A = \overline{\upsilon}_r + \overline{\upsilon}_e \text{, где } \overline{\upsilon}_e \perp \overline{\upsilon}_r \text{, и}$$

$$\upsilon_e = x|\dot{\varphi}|,\ \upsilon_r = |\dot{x}|$$

Тогда $\upsilon_A^2 = x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2$, а значит:

$$\mathrm{T}_\text{к} = \frac{1}{2} m(x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2)$$

Кинетическая энергия всей системы:

$$T = T_{cm} + T_\kappa = \frac{2}{3} Ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m(x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{(4Ml^2 + 3mx^2)\dot{\varphi}^2}{6}$$

Так как $\mathrm{T} = \mathrm{T}(\mathrm{x}, \dot{\mathrm{x}}, \varphi)$, то частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = mx\dot{\varphi}^2,\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2x\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{4Ml^2 + 3mx^2}{3}\ddot{\varphi} \qquad (2)$$

Потенциальная энергия системы будет:

$$\Pi = \Pi(\mathrm{M}\bar{\mathrm{g}}) + \Pi(m\bar{g})$$

Взяв за нулевое положение точку *O*, имеем:

$$\Pi(M\bar{g}) = -MgS_c = -Mgl\cos\varphi,$$
$$\Pi(m\bar{g}) = -mgS_A = -mgx\cos\varphi$$
$$\Pi = -g(Ml + mx)\cos\varphi$$

Обобщенные силы:

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = mg\cos\varphi,\ Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -g(Ml + mx)\sin\varphi \qquad (3)$$

Подставив в (1) результаты (2) и (3), получим:

$$\ddot{x} - x\dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi,\ \frac{4Ml^2 + 3mx^2}{3}\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} = -g(gMl + mx)\sin\varphi$$

Эту задачу можно решить и с помощью общего уравнения динамики, а также с помощью теоремы об изменении главного момента количеств движения материальной системы, что значительно сложнее, чем с помощью уравнений Лагранжа.

Таблица 1

Основные формулы дифференцирования

№ п/п	Функция	Производная	№ п/п	Функция	Производная
	C (постоянная)	0		$\sin x$	$\cos x$
	x^m (m - постоянная)	mx^{m-1}		$\cos x$	$-\sin x$
	Частные случаи:				
	x	1		tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	a^x (a - постоянная)	$a^x \ln a$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	e^x	e^x		$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\log_x a$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$		$arctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
	$\ln x$	$\frac{1}{x}$			
	$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0.4343}{x}$			

Таблица 2

Формулы простейших интегралов

1. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C (m \neq -1)$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

8. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})\right| + C$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C_1$

В частности,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C_1$$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

В частности,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C_1$

В частности,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$$

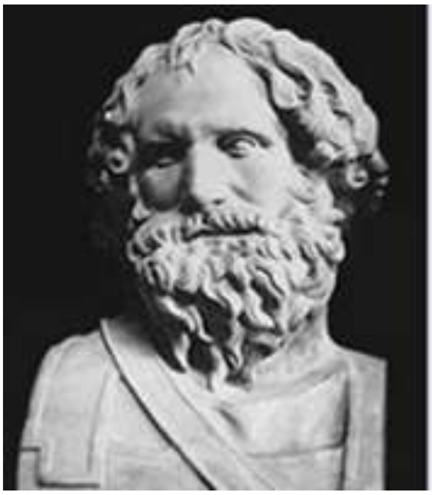
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Часть четвёртая

УЧЕНЫЕ МЕХАНИКИ

Архимед

(287-212 гг. до н.э.)



АРХИМЕД (лат. Archimedes, греч. Архимидис) (около 287 до н.э., Сиракузы, Сицилия — 212 до н.э., там же), древнегреческий ученый, математик и и механик, основоположник теоретической механики и гидростатики. Разработал предвосхитившие интегральное исчисление методы нахождения площадей, поверхностей и объемов различных фигур и тел. В основополагающих трудах по статике и гидростатике (закон Архимеда) дал образцы применения математики в естествознании и технике. Архимеду принадлежит множество технических изобретений (архимедов винт, определение состава сплавов взвешиванием в воде, системы для поднятия больших тяжестей, военные метательные машины), завоевавших ему необычайную популярность среди современников.

Архимед получил образование у своего отца, астронома и математика Фидия, родственника сиракузского тирана Гиерона II, покровительствовавшего Архимеду. В юности провел несколько лет в крупнейшем культурном центре того времени Александрии Египетской, где познакомился с Эрастосфеном. Затем до конца жизни жил в Сиракузах. Во время Второй Пунической войны (218-201), когда Сиракузы были осаждены войском римского полководца Марцелла, Архимед участвовал в обороне города, строил метательные орудия. Военные изобретения ученого (о них рассказывал Плутарх в жизнеописании полководца Марцелла) в течение двух лет помогали сдерживать осаду Сиракуз римлянами. Архимеду приписывается сожжение римского флота направленными через систему вогнутых зеркал солнечными лучами, но это недостоверные сведения. В борьбе с кораблями римлян тяжелые когти и клевы захватывали суда, поднимали их в воздух и затем кормой вниз погружали их в воду. Иногда корабль перевертывался в воздухе и, кружась в воздухе, ударялся о скалы. Под конец страх римлян сделался так велик, что как только они видели конец веревки или бревна над стенами, тот час бросались в бегство, крича: « Архимед направляет на нас еще какую-то машину».

Гений Архимеда вызывал восхищение даже у римлян. Марцелл приказал сохранить ученому жизнь, но при взятии Сиракуз Архимед был убит. Описание некоторых военных машин Архимеда можно найти у Полибия (201-120 г.г. до н.э.) в его «Всеобщей истории»: Архимед соорудил машины по метанию снарядов на любое расстояние. Так, если неприятель подплывал издали, Архимед поражал его из дальнобойных камнеметательниц тяжелыми снарядами или стрелами… Если же снаряды начинали лететь поверх неприятеля, Архимед употреблял меньшие машины, каждый раз сообразуясь с расстоянием, и наводил на римлян такой ужас, что они никак не решались идти на приступ или приблизиться к городу на судах… Некоторые машины метали камни весом не менее 10 талантов (один талант примерно составлял 250 Н), другие выбрасывали груды свинца. Каждый раз, как только приближались штурмовые машины для подъема воинов на стены крепости, жерла Архимедовых машин отклонялись вместе с подставкой и при помощи задвижки метали камни в неприятельское сооружение».

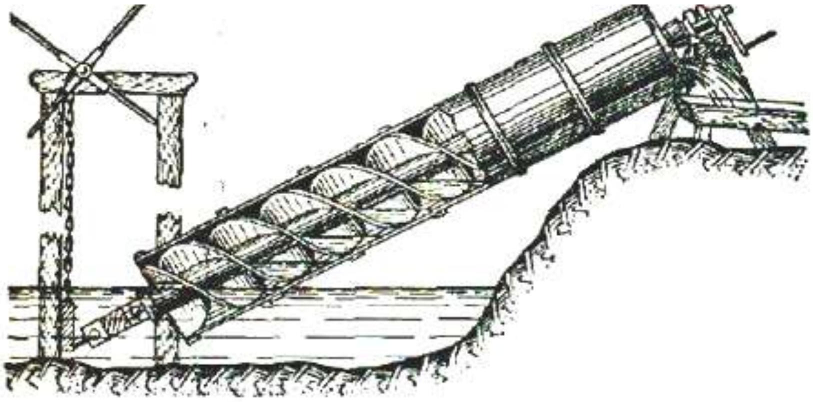
Архимеду принадлежит первенство во многих открытиях из области точных наук. До нас дошло тринадцать трактатов Архимеда. В самом знаменитом из них — «О шаре и цилиндре» (в двух книгах) Архимед устанавливает, что площадь поверхности шара в 4 раза больше площади наибольшего его сечения; формулирует соотношение объемов шара и описанного около него цилиндра как 2:3 — открытие, которым он так дорожил, что в завещании просил поставить на своей могиле памятник с изображением цилиндра с вписанным в него шаром и надписью расчета (памятник через полтора века видел Цицерон). В этом же трактате сформулирована аксиома Архимеда (называемая иногда аксиомой Евдокса), играющая важную роль в современной математике.

В трактате «О коноидах и сфероидах» Архимед рассматривает шар, эллипсоид, параболоид и гиперболоид вращения и их сегменты и определяет их объемы. В сочинении «О спиралях» исследует свойства кривой, получившей его имя (см. Архимедова спираль) и касательной к ней. В трактате «Измерение круга» Архимед предлагает метод определения числа π, который использовался до конца 17 в., и указывает две удивительно точные границы числа π: 310/71<π<3 1/7. В «Псаммите» («Исчисление песчинок») Архимед предлагает систему счисления, позволявшую записывать сверхбольшие числа, что поражало воображение современников. В «Квадратуре параболы» определяет площадь сегмента параболы сначала с помощью «механического» метода, а затем доказывает результаты геометрическим путем. Кроме того, Архимеду принадлежат «Книга лемм», «Стомахион» и обнаруженные только в 20 веке «Метод» (или «Эфод») и «Правильный семиугольник». В «Методе» Архимед описывает процесс открытия в математике, проводя четкое различие между своими механическими приемами и математическим доказательством.

В физике Архимед ввел понятие центра тяжести, установил научные принципы статики и гидростатики, дал образцы применения математических методов в физических исследованиях. Основные положения статики сформулированы в сочинении «О равновесии плоских фигур». Архимед рассматривает сложение параллельных сил, определяет понятие центра тяжести для различных фигур, дает вывод закона рычага. Знаменитый закон гидростатики, вошедший в науку с его именем (смотри Архимеда закон), сформулирован в трактате «О плавающих телах».

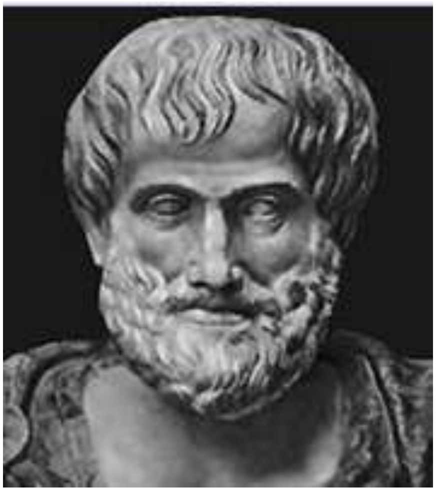
Существует предание, что идея этого закона посетила Архимеда, когда он принимал ванну; с возгласом «Эврика!» он выскочил из ванны и нагим побежал записывать пришедшую к нему научную истину.

Архимед построил небесную сферу — механический прибор, на котором можно было наблюдать движение планет, Солнца и Луны (описан Цицероном; после гибели Архимеда планетарий был вывезен Марцеллом в Рим, где на протяжении нескольких веков вызывал восхищение); гидравлический орган, упоминаемый Тертуллианом как одно из чудес техники (изобретение органа некоторые приписывают александрийскому инженеру Ктесибию). Считается, что еще в юности, во время пребывания в Александрии, Архимед изобрел водоподъемный механизм (смотри Архимедов винт), который был применен при осушении залитых Нилом земель. Он построил также прибор для определения видимого (углового) диаметра Солнца (о нем Архимед рассказывает в трактате «Псаммит») и определил значение этого угла.



Аристотель

(384 – 322 г.г. до н.э.)



АРИСТОТЕЛЬ (лат. Aristotle) (384 до н. э., Стагира, полуостров Халкидика, Северная Греция – 322 до н. э., Халкис, остров Эвбея, Средняя Греция), древнегреческий ученый, философ, основатель Ликея, учитель Александра Македонского.

Отец Аристотеля – Никомах, был врачом при дворе македонских царей. Он сумел дать сыну хорошее домашнее образование, знание античной медицины. Влияние отца сказалось на научных интересах Аристотеля, его серьезных занятиях анатомией. В 367 г. в возрасте семнадцати лет, Аристотель отправился в Афины, где стал учеником Академии Платона. Через несколько лет Аристотель сам начал преподавать в Академии, стал полноправным членом содружества философов-платоников. В течении двадцати лет Аристотель работал вместе с Платоном, но был самостоятельным и независимо мыслящим ученым, критически относился к воззрениям своего учителя.

После смерти Платона в 347 Аристотель выходит из Академии и переселяется в город Атарней (Малая Азия), которым правил ученик Платона Гермий. После смерти Гермия в 344, Аристотель жил в Митилене на острове Лесбос, а в 343 македонский царь Филипп II пригласил ученого стать учителем своего сына Александра. После того как Александр взошел на престол, Аристотель в 335 вернулся в Афины, где основал собственную философскую школу.

Местом школы стал гимнасий неподалеку от храма Апполона Ликейского, поэтому школа Аристотеля получила название Ликей. Читать лекции Аристотель любил прогуливаясь с учениками по дорожкам сада. Так появилось еще одно название Ликея – перипатетическая школа (от перипато – прогулка). Представители перипатетической школы помимо философии занимались и конкретными науками (историей, физикой, астрономией, географией).

В 323 после смерти Александра Македонского в Афинах начался антимакедонский мятеж. Аристотеля, как македонца, не оставили в покое. Его обвинили в религиозном непочитании и он был вынужден покинуть Афины. Последние месяцы жизни Аристотель провел на острове Эвбея.

Научная продуктивность Аристотеля была необычайно высокой, его труды охватывали все отрасли античной науки. Он стал основоположником формальной логики, создателем силлогистики, учения о логической дедукции. Логика у Аристотеля — не самостоятельная наука, а методика суждений, применимая к любой науке. Философия Аристотеля содержит учение об основных принципах бытия: действительности и возможности (акт и потенция), о форме и материи, действующей причине и цели (смотри Энтелехия). В основе метафизики Аристотеля лежит учение о принципах и причинах организации бытия. В качестве начала и первопричины всего сущего Аристотель выдвинул понятие субстанционального разума. Для классификации свойств бытия Аристотель выделил десять предикатов (сущность, количество, качество, отношения, место, время, состояние, обладание, действие, страдание), которые всесторонне определяли субъект. Аристотель установил четыре начала (условия) бытия: форма, материя, причина и цель. Главное значение имеет соотношение формы и материи.

В натурфилософии Аристотель следует следующим принципам: Вселенная конечна; все имеет свою причину и цель; постигать природу математикой невозможно; физические законы не имеют всеобщего характера; природа выстроена по иерархической лестнице; следует не объяснять мир, а классифицировать его составляющие с научной точки зрения. Природу Аристотель разделял на неорганический мир, растения, животных и человека. Человека от животных отличает наличие разума. А так как человек представляет собой общественное существо, важное значение в учении Аристотеля имеет этика. Основной принцип аристотелевой этики – разумное поведение, умеренность (метриопатия).

В политике Аристотель дал классификацию форм государственного устройства, к наилучшим формам он отнес монархию, аристократию и политию (умеренную демократию), к наихудшим – тиранию, олигархию, охлократию. В учении об искусстве Аристотель утверждал, что суть искусства – подражание (мимесис). Он ввел понятие катарсиса (очищения человеческого духа), как цели театральной трагедии, предложил общие принципы построения художественного произведения.

Три книги трактата «Риторика» Аристотель посвятил ораторскому искусству. В этом трактате риторика обрела стройную систему, была увязана с логикой и диалектикой. Аристотель создал теорию стиля и разработал основные принципы классической стилистики.

Сохранившиеся произведения Аристотеля можно расположить по четырем основным группам, согласно предложенной им классификацией наук:

1. Сочинения по логике, составившие свод «Органон» (труды «Категории», «Об истолковании», первая и вторая «Аналитика», «Топика»);

2. Сводный труд о началах бытия, называемый «Метафизика»;

3. Естественнонаучные работы («Физика», «О небе», «Метеорология», «О происхождении и уничтожении», «История животных», «О частях животных», «О возникновении животных», «О движении животных»);

4. Работы в которых рассматриваются проблемы общества, государства, права, исторические, политические, этические, эстетические вопросы («Этика», «Политика», «Афинская полития», «Поэтика», «Риторика»).

В трудах Аристотеля отразился весь научный и духовный опыт Древней Греции, он стал эталоном мудрости, оказал неизгладимое влияние на ход развития человеческой мысли.

Заслугой Аристотеля как механика является то, что он впервые ввел самое название «механика». Главный его труд – «Механические проблемы», в котором рассмотрены 36 вопросов в 36 главах. Наиболее любопытные из них: о действии гребного весла и руля и о действии ветра на парус корабля; действие колес у точек и колесниц; устройство механизма метательной машины и лебедки; о изгибе стержней различной длины, опертых на одну точку, о разломе палки о колено; действие клина и топора; действие щипцов для вырывания зубов и для раскалывания орехов; равновесие тяжелой балки на одной опоре (плечо носильщика) и распределение давления груза, подвешенного к стержню, на две опоры (плечи двух носильщиков) и др. Все эти пестрые конкретные примеры, широко заимствованные из техники древнего мира, Аристотель пытался осмыслить теоретически и разрешить на основе правила равновесия рычага первого рода (прямого неравноплечего), которое было им получено в главе 4. Соответствующие рассуждения далеки от четкости и строгости, а в некоторых случаях попросту приводят к ложным результатам. Так, Аристотель, например, считал, что скорость падения тел зависит от их веса: она тем больше, чем больше вес тела. Движение брошенного тела в воздухе объяснялось, по Аристотелю, действием толкающей силы воздуха, заполняющего образующую сзади тела пустоту. Это, однако, не лишает трактат Аристотеля его значения первого научного сочинения в области механики, известного нам. Трактат оказал большое влияние на дальнейшее развитие науки. В качестве примера приведем следующий любопытный вопрос, поставленный Аристотелем в одной из глав трактата: « Почему , если к дереву приложить топор, обремененный тяжелым грузом, то дерево будет повреждено весьма незначительно; но если топор поднять без груза и ударить по дереву, то оно расколется ? Между тем падающий груз будет в этом случае гораздо меньше давящего».

Задачи этой Аристотель, при смутных механических представлениях своего времени, разрешить не мог.

Леонардо да Винчи
(1452-1519)

ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ (Leonardo da Vinci) (15 апреля 1452, Винчи близ Флоренции — 2 мая 1519, замок Клу, близ Амбуаза, Турень, Франция), итальянский живописец, скульптор, архитектор, ученый, инженер.

Сочетая разработку новых средств художественного языка с теоретическими обобщениями, Леонардо да Винчи создал образ человека, отвечающий гуманистическим идеалам Высокого Возрождения. В росписи «Тайная вечеря» (1495-1497, в трапезной монастыря Санта-Мария делле Грацие в Милане) высокое этическое содержание выражено в строгих закономерностях композиции, ясной системе жестов и мимики персонажей. Гуманистический идеал женской красоты воплощен в портрете Моны Лизы («Джоконда», около 1503). Многочисленные открытия, проекты, экспериментальные исследования в области математики, естественных наук, механики. Отстаивал решающее значение опыта в познании природы (записные книжки и рукописи, около 7 тысяч листов).

Леонардо родился в семье богатого нотариуса. Он сложился как мастер, обучаясь у Андреа дель Верроккьо в 1467-1472 годах. Методы работы во флорентийской мастерской того времени, где труд художника был тесно сопряжен с техническими экспериментами, а также знакомство с астрономом П. Тосканелли способствовали зарождению научных интересов юного Леонардо. В ранних произведениях (голова ангела в «Крещении» Верроккьо, после 1470, «Благовещение», около 1474, оба в Уффици, «Мадонна Бенуа», около 1478, Эрмитаж) обогащает традиции живописи кватроченто, подчеркивая плавную объемность форм мягкой светотенью, оживляя лица тонкой, едва уловимой улыбкой.

В «Поклонении волхвов» (1481-82, не закончена; подмалевок — в Уффици) превращает религиозный образ в зеркало разнообразных человеческих эмоций, разрабатывая новаторские методы рисунка. Фиксируя результаты бесчисленных наблюдений в набросках, эскизах и натурных штудиях (итальянский карандаш, серебряный карандаш, сангина, перо и другие техники), Леонардо добивается редкой остроты в передаче мимики лица (прибегая порой к гротеску и карикатуре), а строение и движения человеческого тела приводит в идеальное соответствие с драматургией композиции.

На службе у правителя Милана Лодовико Моро (с 1481) Леонардо выступает в роли военного инженера, гидротехника, организатора придворных празднеств. Свыше 10 лет он работает над монументом Франческо Сфорца, отца Лодовико Моро; исполненная пластической мощи глиняная модель памятника в натуральную величину не сохранилась (разрушена при взятии Милана французами в 1500) и известна лишь по подготовительным набросками.

На этот период приходится творческий расцвет Леонардо-живописца. В «Мадонне в скалах» (1483-94, Лувр; второй вариант — 1487-1511, Национальная галерея, Лондон) излюбленная мастером тончайшая светотень («сфумато») предстает новым ореолом, который идет на смену средневековым нимбам: это в равной мере и божественно-человеческое, и природное таинство, где скалистый грот, отражая геологические наблюдения Леонардо, играет не меньшую драматическую роль, чем фигуры святых на переднем плане.

Это был универсальный ученый эпохи Возрождения, оставивший значительный вклад в самых различных сферах деятельности: анатомии, ботаники, искусства, военно-инженерного дела, гидравлики. Он разработал много научно-технических концепций, значительно опередивших свое время. Ф. Энгельс в «Диалектике природы» писал о Леонардо да Винчи: «он был не только великим художником, но и великим математиком, механиком и инженером, которому обязаны важными открытиями самые разнообразные отрасли физики».

В области механики он настойчиво и последовательно использовал метод экспериментального исследования во всех ее разделах: определение коэффициента трения скольжения, исследование явления удара, падение тел с высоты, определение траектории горизонтально брошенного тела.

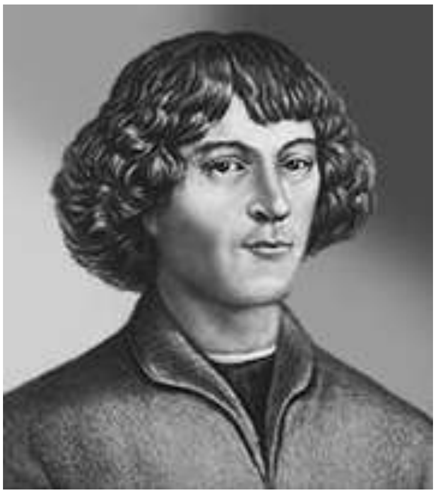
Леонардо да Винчи придумал ряд сложных передаточных механизмов. Новаторским были его попытки в области конструирования летательных аппаратов, основанные также на экспериментах и на тщательном наблюдении за полетом птиц. В рукописях ученого найдены рисунки парашюта и геликокоптера.

В своих исследованиях по определению центра тяжести твердых тел он предвосхитил позднейшие работы ученых 16 века.

К сожалению, записи Леонардо да Винчи были опубликованы лишь в конце 19 и начале 20 века и потому в свое время не смогли послужить развитию науки.

Коперник Николай

(1473-1543)



КОПЕРНИК (Kopernik, Copernicus) Николай (1473-1543), великий польский астроном, выдающийся деятель эпохи Возрождения, создатель гелиоцентрической системы мира. Совершил переворот в естествознании, отказавшись от принятого в течение многих веков учения о центральном положении Земли. Объяснил видимые движения небесных светил вращением Земли вокруг оси и обращением планет (в т. ч. Земли) вокруг Солнца. Свое учение изложил в сочинении «Об обращениях небесных сфер» (1543), запрещенном католической церковью с 1616 по 1828.

Коперник родился в городе Торунь (Польша), куда его отец, богатый краковский купец, переселился около 1455 г. Сохранилось мало документальных данных о его жизни и деятельности. Первая обстоятельная биография Коперника была написана спустя сто лет после его смерти. Коперник – выходец из купеческой семьи. Отец его, уроженец Кракова, занимался торговлей и многие годы был выборным судьей в г. Торунь; он умер, когда Копернику было 10 лет. После смерти отца воспитанием Коперника занимался его дядя – будущий епископ. Он дал Копернику разностороннее образование. Закончив кафедральную школу во Влоцлавске, Коперник в возрасте 19 лет поступил в Краковский университет, где основательно изучал астрономию, математику, медицину и искусство наблюдений, а затем совершенствовал свои знания в итальянских университетах Падуи и Болоньи, главным образом в области астрономии. В 1497 г. он получил место каноника в кафедральном соборе г. Фрауенбурга (в восточной Пруссии). В 1500 г. Коперник читал лекции по математике и астрономии в Риме. В 1503 г. ему был вручен докторский диплом. В 1504 г. вернулся на родину, где был назначен секретарем и врачом к своему дяде, епископу Вагенроде. После смерти дяди (1512) он поселился в г. Фрауенбурге, где прожил свыше 30 лет. Коперник принимал самое активное участие в жизни своей страны и вел борьбу за ее независимость с Тевтонским орденом. К концу 1520 г. он сумел так укрепить Фрауенбург, что крестоносцы больше не пытались им овладеть. К 1530 г. Коперник в основном заканчивает разработку своего учения о системе мира, но лишь в 1543 г. Коперник решается напечатать рукопись с полным изложением гелиоцентрической системы. В последние дни жизни Коперник увидел первый экземпляр напечатанного его бессмертного произведения «О вращении небесных сфер». Умер в 1543 г. в Фрауенбурге.

Коперник является одним из «титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многосторонности и учености» (Ф. Энгельс. Диалектика природы). Он совершенно ясно установил факт относительности движения в механике. Создание гелиоцентрической системы мира явилось результатом более чем сорокалетнего упорного труда. Огромное философское значение этой системы состоит в том, что в ней Коперник рассматривал Землю не как центр вселенной, а как одну из планет, обращающихся вокруг солнца. Только перенесение центра мира в центр Солнца придало этой системе стройность и убедительность, хотя прямые доказательства движения Земли Коперник добыть не сумел, это стало известно значительно позднее.

Рукопись Коперника, содержащая вариант труда «Об обращении небесных сфер», изданного в 1543 г. в Нюрнберге, была найдена в середине 19 века в одной из библиотек Праги.

В этом сочинении «Об обращении небесны сфер» в главе 5 «О том, свойственно ли Земле круговое движение, и о месте Земли» Коперник создал свою модель солнечной системы.

Уже доказано, что Земля имеет форму шара; полагаю, что нужно посмотреть, не вытекает ли из ее формы и движение, а также определить занимаемое ею место во Вселенной; без этого невозможно получить надежную теорию небесных явлений. Большинство авторов согласно с тем, что Земля покоится в середине мира, так что противоположное мнение они считают недопустимым и даже достойным осмеяния.

На самом деле, если мы сообщим Земле какое-нибудь движение, то это движение обнаружится таким же и во всем, что находится вне Земли, но только в противоположную сторону, как бы проходящим мимо; таким, прежде всего будет и суточное вращение. Мы видим, что оно увлекает весь мир, за исключением Земли и того, что ее непосредственно окружает.

Возникает и другое, не менее важное сомнение о месте Земли, хотя почти все принимают и верят, что Земля находится в середине мира.

Действительно, поскольку планеты наблюдаются и более близкими к Земле и более удаленными, то это необходимо говорит о том, что центр Земли не есть центр их кругов. Ведь никак не установлено, Земля ли к ним подходит и уходит или они приближаются к ней и удаляются. Не удивительно также, если кто-нибудь, кроме упомянутого суточного вращения, предположит у Земли и какое-то другое вращение.

Мнение, что Земля вращается и даже имеет несколько движений и является одной из планет, как говорят, высказывал пифагореец Филолай, незаурядный математик, ради посещения которого Платон не замедлил отправиться в Италию, как передают описывавшие жизнь Платона…

В главе 6 «О неизмеримости неба по сравнению с величиной Земли» Коперник утверждал следующее.

Столь большая громада Земли не имеет никакой значащей величины по сравнению с небом, можно понять из того, что «ограничивающие» круги…

делят всю небесную сферу пополам, чего не могло бы быть, если бы величина Земли или расстояние от центра мира были значительными по сравнению с небом.

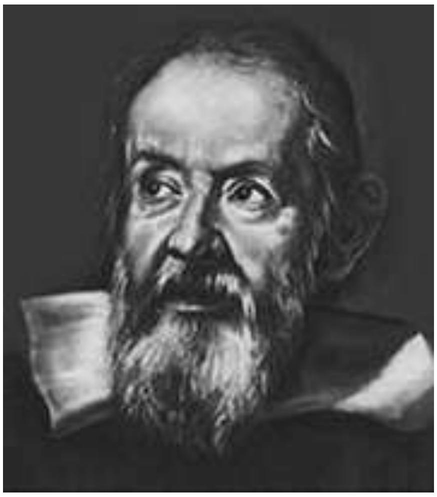
Такие рассуждения достаточно ясно показывают, что небо неизмеримо велико по сравнению с Землей и представляет бесконечно большую величину; по оценке наших чувств Земля по отношению к небу, как точка к телу, а по величине, как конечное к бесконечному.

Стевин Симон
(1548-1620)

Стевин Симон (1548-1620) - замечательный нидерландский математик и инженер жил в эпоху, когда Нидерланды, интенсивно развивая мануфактурную промышленность и заморскую торговлю, вышли в ряд передовых стран Европы. Родился в Брюгге. В молодости работал счетоводом. В 1571-1581гг. путешествовал по Европе. С 1581г. жил в Лейдене, Дельфте, Гааге. Преподавал в Лейденском университете, служил инженером в армии принца Оранского, отстаивавшей свободу Нидерландов от испанских захватчиков. Последние годы жизни работал инспектором водных сооружений, привлекался в качестве консультанта Голландским адмиралтейством. Стевин принимал активное участие в общественно-практической жизни своей родины, сочетая это с научными трудами. Практическая деятельность Стевина плодотворно отразилась на его научно-исследовательской работе в области математики и механики. Как инженер Стевин сделал значительный вклад в механику. Особенно велики заслуги Стевина перед механикой, где труды его сыграли решающую роль в развитии геометрического направления статики. Главным трудом Стевина по механике является его трактат «Начала статики», впервые изданный в 1586 г. Построение своей геометрической статики Стевин осуществил исходя из постулата геометрической статики Архимеда. Стевин выводит закон равновесия рычага, а затем использует его для вывода более сложных законов равновесия. Наряду с этим Стевин использует также дополнительный принцип, названный им «принципом невозможности вечного двигателя». Рассматривая равновесие груза на наклонной плоскости, Стевин впервые в истории механики устанавливает правило параллелограмма сил. Насущные вопросы практики потребовали от Стевина включения в его статику особого раздела о веревочных машинах, включивших в себя блоки и полисчасты. Разрабатывая теорию равновесия последних, Стевин вплотную подошел ктому, что позднее было названо принципом возможных перемещений. Он формулирует свой вариант «золотого правила механики» так: «Как путь движущего относится к пути движимого, так и сила движимого относится к силе движущего». Отметим, наконец, что Стевин построил в истории «автомобиль». Правда, он был парусный, но все равно современники рассматривали его как «Гаагское чудо» (испытания повозки Стевина проходило вблизи Гааги). Ветряная повозка Стевина развивала значительную по тем временам скорость до 34 км/ч. При первом испытании в экипаже сидели 28 человек. В своем устройстве повозка имела любопытную особенность: ось задних колес можно было поворачивать при помощи особого «руля» и таким образом управлять повозкой.

Важнейшие из его работ в области математики: "Десятина" (1585г.) и "Математические комментарии", в 5-ти томах (1605-1608гг.) В первой работе Стевин изложил десятичную систему мер и десятичные дроби (в то время европейцы еще не знали, что десятичные дроби открыл аль-Каши). Ввел отрицательные корни уравнений, сформулировал условия существования корня в данном интервале и предложил способ его приближенного вычисления.

Галилей Галилео
(1564-1642)



ГАЛИЛЕЙ (Galilei) Галилео (1564-1642), итальянский ученый, один из основателей точного естествознания. Боролся против схоластики, считал основой познания опыт. Заложил основы современной механики: выдвинул идею об относительности движения, установил законы инерции, свободного падения и движения тел по наклонной плоскости, сложения движений; открыл изохронность колебаний маятника; первым исследовал прочность балок. Построил телескоп с 32-кратным увеличением и открыл горы на Луне, 4 спутника Юпитера, фазы у Венеры, пятна на Солнце. Активно защищал гелиоцентрическую систему мира, за что был подвергнут суду инквизиции (1633), вынудившей его отречься от учения Н. Коперника. До конца жизни Галилей считался «узником инквизиции» и принужден был жить на своей вилле Арчетри близ Флоренции. В 1992 папа Иоанн Павел II объявил решение суда инквизиции ошибочным и реабилитировал Галилея.

* * *

ГАЛИЛЕЙ (Galilei) Галилео (15 февраля 1564, Пиза — 8 января 1642, Арчетри, близ Флоренции), итальянский физик, механик и астроном, один из основоположников естествознания; поэт, филолог, критик.

В годы детства и юности Галилея практически безраздельно господствовали представления, сформировавшиеся еще во времена античности. Некоторые из них, например, геометрия Евклида и статика Архимеда, сохранили свое значение и в наши дни. Большой багаж накопили и наблюдения астрономов, приведшие к возникновению прогрессивной для своего времени системы мира Птолемея (2 в. н. э.). Однако многие положения античной науки, обретшие со временем статус непререкаемых догм, не выдержали испытания временем и оказались отвергнутыми, когда главным арбитром в науке был признан опыт. В первую очередь, это относится к механике Аристотеля и многим другим его естественно-научным представлениям. Именно эти ошибочные положения стали фундаментом официального «идеологического кредо», и требовались не только способности к независимому мышлению, но и просто мужество, чтобы выступить против него. Одним из первых на это отважился Галилео Галилей.

Галилей происходил из знатной, но обедневшей дворянской семьи. Его отец, музыкант и математик, хотел, чтобы сын стал врачом, и в 1581, после окончания монастырской школы, определил его на медицинский факультет Пизанского университета. Но медицина не увлекала семнадцатилетнего юношу. Оставив университет, он уехал во Флоренцию и погрузился в самостоятельное изучение сочинений Евклида и Архимеда. По совету профессора философии Риччи и уступая просьбам сына, отец Галилео перевел его на философский факультет, где более углубленно изучались философия и математика.

В детские годы Галилей увлекался конструированием механических игрушек, мастерил действующие модели машин, мельниц и кораблей. Как рассказывал впоследствии его ученик Вивиани, Галилей еще в юности отличался редкой наблюдательностью, благодаря которой сделал свое первое важное открытие: наблюдая качания люстры в Пизанском соборе, установил закон изохронности колебаний маятника (независимость периода колебаний от величины отклонения). Некоторые исследователи подвергают сомнению рассказ Вивиани об обстоятельствах этого открытия, но достоверно известно, что Галилей не только проверял этот закон на опытах, но и использовал его для определения промежутков времени, что, в частности, было восторженно принято медиками.

Умение наблюдать и делать выводы из увиденного всегда отличало Галилея. Еще в молодости он понял, что «... явления природы, как бы незначительны, как бы во всех отношениях маловажны ни казались, не должны быть презираемы философом, но все должны быть в одинаковой мере почитаемы. Природа достигает большого малыми средствами, и все ее проявления одинаково удивительны». По существу, это высказывание можно считать декларацией экспериментального подхода Галилея к изучению явлений природы.

В 1586 Галилей публикует описание сконструированных им гидростатических весов, предназначенных для измерения плотности твердых тел и определения центров тяжести. Эта, как и другие его работы, оказывается замеченной. У него появляются влиятельные покровители, и благодаря их протекции он получает в 1589 место профессора в Пизанском университете (правда, с минимальным окладом).

Начав читать лекции по философии и математике в университете, Галилей оказался перед непростым выбором. С одной стороны — обретшие статус нерушимых догм воззрения Аристотеля, с другой — плоды собственных размышлений и, что еще важнее, — опыта. Аристотель утверждал, что скорость падения тел пропорциональна их весу. Это утверждение уже вызывало сомнения, а проведенные Галилеем в присутствии многочисленных свидетелей наблюдения за падением с Пизанской башни шаров различного веса, но одинаковых размеров, наглядно опровергали его. Аристотель учил, что различным телам присуще различное «свойство легкости», отчего одни тела падают быстрее других, что понятие покоя абсолютно, что для того, чтобы тело двигалось, его постоянно должен подталкивать воздух, а следовательно, движение тел свидетельствует об отсутствии пустоты.

Уже в 1590, через год после начала работы в Пизе, Галилей пишет трактат «О движении», в котором выступает с резкими возражениями против воззрений перипатетиков (последователей Аристотеля). Это не могло не вызвать резко неодобрительного отношения к нему со стороны представителей казенной схоластической науки. Кроме того, Галилей в то время был сильно стеснен в средствах, и потому был рад получить (опять благодаря своему покровителю) приглашение правительства Венецианской республики на работу в университет в Падую.

Переход в 1592 в Падуанский университет, где Галилей занял кафедру математики, ознаменовал собой начало плодотворнейшего периода в его жизни. Здесь он вплотную подходит к изучению законов динамики, исследует механические свойства материалов, изобретает первый из физических приборов для исследования тепловых процессов — термоскоп, совершенствует подзорную трубу и первым догадывается использовать ее для астрономических наблюдений, здесь становится самым активным и авторитетным сторонником системы Коперника, обретая благодарность и уважение потомков и активную враждебность многочисленных современников.

Важнейшим достижением Галилея в динамике было создание принципа относительности, ставшего основой современной теории относительности. Решительно отказавшись от представлений Аристотеля о движении, Галилей пришел к выводу, что движение (имеются в виду только механические процессы) относительно, то есть нельзя говорить о движении, не уточнив, по отношению к какому «телу отсчета» оно происходит; законы же движения безотносительны, и поэтому, находясь в закрытой кабине (он образно писал «в закрытом помещении под палубой корабля»), нельзя никакими опытами установить, покоится ли эта кабина или же движется равномерно и прямолинейно («без толчков», по выражению Галилея).

Термоскоп фактически явился прообразом термометра, и чтобы подойти к его изобретению, Галилей должен был радикально пересмотреть существующие в то время представления о тепле и холоде.

Первые известия об изобретении в Голландии подзорной трубы дошли до Венеции уже в 1609. Заинтересовавшись этим открытием, Галилей значительно усовершенствовал прибор. 7 января 1610 произошло знаменательное событие: направив построенный телескоп (примерно с 30-кратным увеличением) на небо, Галилей заметил возле планеты Юпитер три светлые точки; это были спутники Юпитера (позже Галилей обнаружил и четвертый). Повторяя наблюдения через определенные интервалы времени, он убедился, что спутники обращаются вокруг Юпитера. Это послужило наглядной моделью кеплеровской системы, убежденным сторонником которой сделали Галилея размышления и опыт.

Были и другие важные открытия, которые еще больше подрывали доверие к официальной космогонии с ее догмой о неизменности мироздания: появилась новая звезда; изобретение телескопа позволило обнаружить фазы Венеры и убедиться, что Млечный Путь состоит из огромного числа звезд. Открыв солнечные пятна и наблюдая их перемещение, Галилей совершенно правильно объяснил это вращением Солнца. Изучение поверхности Луны показало, что она покрыта горами и изрыта кратерами. Даже этот беглый перечень позволил бы причислить Галилея к величайшим астрономам, но его роль была исключительной уже потому, что он произвел поистине революционный переворот, положив начало инструментальной астрономии в целом.

Сам Галилей понимал важность сделанных им астрономических открытий. Он описал свои наблюдения в сочинении, вышедшем в 1610 под гордым названием «Звездный вестник».

После выхода «Звездного вестника» с посвящением новому Тосканскому герцогу Козимо II Медичи Галилей принимает приглашение герцога вернуться во Флоренцию, где становится придворным «философом» и «первым математиком» университета, без обязательства читать лекции. К тому времени слава о работах Галилея прокатилась по всей Италии, вызывая восхищение одних и яростную ненависть других. Правда, какое-то время враждебные чувства не проявлялись. Более того, когда в 1611 Галилей приехал в Рим, ему был оказан церкви. Он еще не знал, что за ним учреждена секретная слежка.

К 1612 наступление противников Галилея усилилось. В 1613 его ученик аббат Кастелли, профессор Пизанского университета, сообщает ему, что поднят вопрос о несовместимости открытий Галилея со Священным Писанием, причем в числе обвинителей активно выступает и мать герцога Тосканского.

В ответном письме Кастелли, явившемся по сути программным документом, Галилей дал глубокий и развернутый ответ на все обвинения, предприняв попытку четко разграничить сферы науки и церкви. Почти два года церковь молчала, возможно, не имея о письме точных сведений, хотя о нем уже было известно в Пизе, Риме и Флоренции. Когда же копия письма (к тому же с намеренными искажениями) была направлена в инквизицию, то узнавший об этом Галилей в начале февраля 1616 едет в Рим в надежде отстоять свое учение.

Обстоятельства и на этот раз благоприятствовали Галилею. Незадолго до его приезда в Рим появилось сочинение одного священника, в котором высказывалась мысль, что учение Коперника не противоречит религии. Рекомендательные письма герцога Тосканского убедили инквизицию, что обвинения Галилея в ереси безосновательны. Галилею, однако, предстояло решить самую трудную задачу: легализовать свои научные взгляды, и он начал действовать. По воспоминаниям современников, Галилей обладал блестящим даром популяризатора и полемиста, и его многочисленные выступления имели несомненный успех. Но он переоценил силу научных доводов и недооценил силу власти защитников идеологических догм. В марте 1616 конгрегация иезуитов выпустила декрет, в котором объявила учение Коперника еретическим, а его книги запрещенными. Имя Галилея в декрете не было названо, но частным образом ему было приказано принести покаяние церкви и отказаться от своих взглядов. Галилей формально подчинился приказу и вынужденно изменил тактику. В течение многих лет он не выступал с открытой пропагандой учения Коперника. За этот период Галилей выпустил единственное большое сочинение — полемический трактат «Пробирные весы» (1623) по поводу трех комет, появившихся в 1618. По форме, остроумию и изысканности стиля это — одно из лучших произведений Галилея.

Хотя открытая защита системы Коперника и была под запретом, не возбранялась форма диалога-диспута. В 1630 Галилей едет в Рим с готовой рукописью «Диалога о приливах и отливах», где в форме разговора трех собеседников дано представление о двух главных системах мира — Птоломея и Коперника. После двух лет борьбы с цензурой Галилей получает разрешение на публикацию книги. Она выходит в августе 1632 во Флоренции под названием «Диалог о двух системах мира — птоломеевой и коперниковой».

Выход книги, весть о которой быстро облетела Европу, вызвал незамедлительную реакцию инквизиции. 23 ноября 1632 Галилею предписано явиться в Рим. Несмотря на преклонный возраст и болезнь, его просьба об отсрочке остается без внимания. В феврале 1633 Галилея на носилках доставляют в Рим. До 12 апреля он живет в доме тосканского посланника, а затем его водворяют в тюрьму инквизиции. Допросы, требования отречения, угрозы пыток и возможно самое ужасное — уничтожение всех его трудов. Попытки Галилея оправдаться, что «Диалоги» — всего лишь дискуссия, на этот раз безуспешны. Они лишь усиливают раздражение судей. 22 июня Галилея привозят в доминиканский монастырь св. Минервы, заставляют подписать отречение и на коленях принести публичное покаяние.

После процесса Галилей объявлен «узником святой инквизиции», и местом его жительства определен сначала герцогский дворец в Риме, а затем вилла Арчетри под Флоренцией. Вплоть до 1637, когда он потерял зрение, Галилей продолжал напряженно работать и завершил подготовку книги «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению», в которой подведен итог всем его достижениям в области механики. В этой книге, в отличие от «Диалогов», изложение построено так, будто полемика со сторонниками Аристотеля утратила актуальность, и необходимо утверждать новые научные взгляды.

В книге ведется рассказ о четырех «Днях».

Начало первого из них посвящено вопросу о скорости света; далее обсуждается движение по инерции и особенности колебаний маятников, что приводит Галилея к замечательным идеям относительно распространения волн вообще и акустических волн в частности. «Второй день» посвящен твердости и разрушению материалов. Последующие два «Дня» — вопросам динамики, в том числе движению тел по наклонной плоскости.

Благодаря помощи друзей, его последняя книга была напечатана еще при жизни Галилея, что доставило ему огромную радость.

Галилей умер 8 января 1642 на вилле Арчетри. В 1732, согласно последней воле Галилея, его прах был перенесен во Флоренцию в церковь Санта-Кроче, где он погребен рядом с Микеланджело.

Кеплер Иоганн

(1571-1630)

КЕПЛЕР (Kepler) Иоганн (1571-1630), немецкий астроном, один из творцов астрономии нового времени. Открыл законы движения планет (законы Кеплера), на основе которых составил планетные таблицы (т. н. Рудольфовы). Заложил основы теории затмений. Изобрел телескоп, в котором объектив и окуляр — двояковыпуклые линзы.

Кеплер родился в Вюртемберге, в бедной семье. В 1588 г. он окончил монастырскую школу со степенью бакалавра и в 1589 г. поступил в Тюбингенский университет. По окончанию университета в 1593 г. Кеплер получил степень магистра, но, обвиненный протестантскими богословами в свободомыслии, не был допущен к богословской деятельности. В 1594 г. он был направлен лектором по математике и астрономии в высшую школу в Граце, где написал свое первое крупное сочинение «Тайна Вселенной» (1596) . В этой работе Кеплер пытался установить числовую зависимость, связывающую расстояние планет от солнца с известными геометрическими телами – правильными многогранниками. Эта попытка не имела научного значения, но уже в этой книге Кеплер показал себе приверженцем теории Коперника. Религиозное преследование со стороны католиков вынуждали Кеплера покинуть Грац и переехать в Прагу, к известному датскому астроному Тихо Браге, после смерти которого (1601) получил в свое распоряжение материалы его наблюдений. В 1602 г. он был назначен преемником Браге в звании математика.

Путем обработки наблюдений над движением планет Кеплер установил три закона, носящих его имя. Первые два из них (планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце; за равные промежутки времени радиусы – векторы планет ометают равные площади – закон площадей) были опубликованы в 1609 г. в Гейдельберге; третий закон (квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей их орбит) – в Линцо в 1619 г. Кеплер утверждал, что движение небесных тел подчиняется тем же законам, что и движение земных тел. Он ясно понимал наличие взаимного тяготения (гравитации), но ошибочно полагал его обратную пропорциональность расстоянию и не сумел дать ему математического объяснения. Кеплер также широко применял теорему о сложении скоростей при определении скорости абсолютного движения.

Конец жизни Кеплера был омрачен скитаниями и бедствиями. Начавшая Тридцатилетняя война и усиленные преследования католической церкви вынудили Кеплера в поисках убежища отправится в 1626 г. в Ульм. Там он завершил (1627) последнюю крупную работу «Рудольфовы таблицы» (названную по имени короля Рудольфа ||, долгое время покровительствовавшего Кеплеру). В этой работе Кеплер подвел итог своих многочисленных трудов, а также наблюдений Тихо Браге. Составленные таблицы давали возможность в удобной форме для любого момента времени определять положения планет с высокой для своей эпохи степенью точности.

Законы Кеплера, навсегда вошедшие в теоретическую астрономию, получили свое математическое объяснение в механике Ньютона, в частности в законе всемирного тяготения. Ф. Энгельс в «Диалектике природы» отмечал, что «в области математики, механики и астрономии, статики и диалектики он (первый период нового естествознания) дал великие достижения, особенно благодаря работам Кеплера и Галилея, выводы из которых были сделаны Ньютоном».

Декарт Рене

(1596-1650)

ДЕКАРТ (Descartes) Рене (латинизированное — Картезий; Cartesius) (1596-1650), французский философ, математик, физик и физиолог. С 1629 в Нидерландах. Заложил основы аналитической геометрии, дал понятия переменной величины и функции, ввел многие алгебраические обозначения. Высказал закон сохранения количества движения, дал понятие импульса силы. Автор теории, объясняющей образование и движение небесных тел вихревым движением частиц материи (вихри Декарта). Ввел представление о рефлексе (дуга Декарта). В основе философии Декарта — дуализм души и тела, «мыслящей» и «протяженной» субстанции. Материю отождествлял с протяжением (или пространством), движение сводил к перемещению тел. Общая причина движения, по Декарту, — Бог, который сотворил материю, движение и покой. Человек — связь безжизненного телесного механизма с душой, обладающей мышлением и волей. Безусловное основоположение всего знания, по Декарту, — непосредственная достоверность сознания («мыслю, следовательно, существую»). Существование Бога рассматривал как источник объективной значимости человеческого мышления. В учении о познании Декарт — родоначальник рационализма и сторонник учения о врожденных идеях. Основные сочинения: «Геометрия» (1637), «Рассуждение о методе...» (1637), «Начала философии» (1644).

* * *

ДЕКАРТ (Descartes) Рене (латинизированное — Картезий; Cartesius) (31 марта 1596, Лаэ, Турень, Франция — 11 февраля 1650, Стокгольм), французский философ, математик, физик и физиолог, основатель новоевропейского рационализма и один из влиятельнейших метафизиков Нового времени.

Родившись в дворянской семье, Декарт получил хорошее образование. В 1606 году отец отправил его в иезуитскую коллегию Ла Флеш. Учитывая не очень крепкое здоровье Декарта, ему делали некоторые послабления в строгом режиме этого учебного заведения, напр., разрешали вставать позже других. Приобретя в коллегии немало познаний, Декарт в то же время проникся антипатией к схоластической философии, которую он сохранил на всю свою жизнь.

После окончания коллегии Декарт продолжил образование. В 1616 в университете Пуатье он получил степень бакалавра права. В 1617 Декарт поступает на службу в армию и много путешествует по Европе.

1619 год в научном отношении оказался ключевым для Декарта. Именно в это время, как он сам писал в дневнике, ему открылись основания новой «удивительнейшей науки». Скорее всего, Декарт имел в виду открытие универсального научного метода, который он впоследствии плодотворно применял в самых разных дисциплинах.

В 1620-е годы Декарт знакомится с математиком М. Мерсенном, через которого он долгие годы «держал связь» со всем европейским научным сообществом.

В 1628 Декарт более чем на 15 лет обосновывается в Нидерландах, но не поселяется в каком-то одном месте, а около двух десятков раз меняет место жительства.

В 1633, узнав об осуждении церковью Галилея, Декарт отказывается от публикации натурфилософской работы «Мир», в которой излагались идеи естественного возникновения вселенной по механическим законам материи.

В 1637 на французском языке выходит работа Декарта «Рассуждение о методе», с которой, как многие считают, и началась новоевропейская философия.

В 1641 появляется главное философское сочинение Декарта «Размышления о первой философии» (на латинском языке), а в 1644 «Первоначала философии», работа, замышлявшаяся Декартом как компендий, суммирующий наиболее важные метафизические и натурфилософские теории автора.

Большое влияние на европейскую мысль оказала и последняя философская работа Декарта «Страсти души», опубликованная в 1649 г. В том же году по приглашению шведской королевы Кристины Декарт отправился в Швецию. Суровый климат и непривычный режим (королева заставляла Декарта вставать в 5 утра, чтобы давать ей уроки и выполнять другие поручения) подорвали здоровье Декарта, и, подхватив простуду, он умер от пневмонии.

Философия Декарта ярко иллюстрирует стремление европейской культуры к освобождению от старых догм и построению новой науки и самой жизни «с чистого листа». Критерием истины, считает Декарт, может быть только «естественный свет» нашего разума. Декарт не отрицает и познавательной ценности опыта, но он видит его функцию исключительно в том, чтобы он приходил на помощь разуму там, где собственных сил последнего недостаточно для познания. Размышляя над условиями достижения достоверного знания, Декарт формулирует «правила метода», с помощью которого можно прийти к истине. Первоначально мыслившиеся Декартом весьма многочисленными, в «Рассуждении о методе», они сводятся им к четырем основным положениям, составляющим «квинтэссенцию» европейского рационализма: 1) начинать с несомненного и самоочевидного, т. е. с того, противоположное чему нельзя помыслить, 2) разделять любую проблему на столько частей, сколько необходимо для ее эффективного решения, 3) начинать с простого и постепенно продвигаться к сложному, 4) постоянно перепроверять правильность умозаключений. Самоочевидное схватывается разумом в интеллектуальной интуиции, которую нельзя смешивать с чувственным наблюдением и которая дает нам «ясное и отчетливое» постижение истины. Разделение проблемы на части позволяет выявить в ней «абсолютные», т. е. самоочевидные элементы, от которых можно отталкиваться в последующих дедукциях. Дедукцией Декарт называет «движение мысли», в котором происходит сцепление интуитивных истин. Слабость человеческого интеллекта требует проверять корректность сделанных шагов на предмет отсутствия пробелов в рассуждениях. Такую проверку Декарт называет «энумерацией» или «индукцией». Итогом последовательной и разветвленной дедукции должно стать построение системы всеобщего знания, «универсальной науки». Декарт сравнивает эту науку с деревом. Корнем его является метафизика, ствол составляет физика, а плодоносные ветви образуют конкретные науки, этика, медицина и механика, приносящие непосредственную пользу. Из этой схемы видно, что залогом эффективности всех этих наук является правильная метафизика.

От метода открытия истин Декарт отличает метод изложения уже разработанного материала. Его можно излагать «аналитически» и «синтетически». Аналитический метод проблемен, он менее систематичен, но больше способствует пониманию. Синтетический, как бы «геометризирующий» материал, более строг. Декарт все же отдает предпочтение аналитическому методу.

Исходной проблемой метафизики как науки о самых общих родах сущего является, как и в любых других дисциплинах, вопрос о самоочевидных основаниях. Метафизика должна начинаться с несомненной констатации какого-либо существования. Декарт «пробует» на самоочевидность тезисы о бытии мира, Бога и нашего «Я». Мир можно представить несуществующим, если вообразить, что наша жизнь есть долгое сновидение. В бытии Бога тоже можно усомниться. А вот наше «Я», считает Декарт, нельзя подвергнуть сомнению, так как само сомнение в своем бытии доказывает существование сомнения, а значит и сомневающегося Я. «Сомневаюсь, следовательно существую» — так Декарт формулирует эту важнейшую истину, обозначающую субъективистский поворот европейской философии Нового времени. В более общем виде этот тезис звучит так: «мыслю, следовательно существую» — cogito, ergo sum. Сомнение составляет лишь один из «модусов мышления», наряду с желанием, рассудочным постижением, воображением, памятью и даже ощущением. Основой мышления является сознание. Поэтому Декарт отрицает существование бессознательных идей. Мышление является неотъемлемым свойством души. Душа не может не мыслить, она — «мыслящая вещь», res cogitans. Признание несомненным тезиса о собственном существовании не означает, однако, что Декарт считает вообще невозможным несуществование души: она не может не существовать, лишь пока мыслит. В остальном же душа — случайная вещь, т. е. может как быть, так и не быть, ибо она несовершенна. Все случайные вещи черпают свое бытие извне. Декарт утверждает, что душа ежесекундно поддерживается в своем существовании Богом. Тем не менее ее можно назвать субстанцией, так как она может существовать отдельно от тела. Впрочем, на деле душа и тело тесно взаимодействуют. Однако принципиальная независимость души от тела является для Декарта залогом вероятного бессмертия души.

Из «Размышлений о первой философии».

Учение о Боге.

От философской психологии Декарт переходит к учению о Боге. Он дает несколько доказательств существования высшего существа. Наиболее известным является так называемый «онтологический аргумент»: Бог есть всесовершенное существо, поэтому в понятии о нем не может отсутствовать предикат внешнего существования, что означает невозможность отрицать бытие Бога, не впадая в противоречие. Другое доказательство, предлагаемое Декартом, более оригинально (первое было хорошо известно в средневековой философии): в нашем уме есть идея Бога, у этой идеи должна быть причина, но причиной может быть только сам Бог, так как в противном случае идея высшей реальности была бы порождена тем, что этой реальностью не обладает, т. е. в действии было бы больше реальности, чем в причине, что нелепо. Третий аргумент основан на необходимости существования Бога для поддержания человеческого существования. Декарт полагал, что Бог, не будучи сам по себе связан законами человеческой истины, является тем не менее источником «врожденного знания» человека, в которое входит сама идея Бога, а также логические и математические аксиомы. От Бога, считает Декарт, исходит и наша вера в существование внешнего материального мира. Бог не может быть обманщиком, а поэтому эта вера истинна, и материальный мир действительно существует.

Убедившись в существовании материального мира, Декарт приступает к исследованию его свойств. Главным свойством материальных вещей оказывается протяжение, которое может выступать в различных модификациях. Декарт отрицает существование пустого пространства на том основании, что везде, где есть протяжение, имеется и «протяженная вещь», res extensa. Другие качества материи мыслятся смутно и, возможно, считает Декарт, существуют только в восприятии, а в самих предметах отсутствуют. Материя состоит из элементов огня, воздуха и земли, все различие которых состоит только в величине. Элементы не являются неделимыми и могут превращаться друг в друга. Пытаясь согласовать концепцию дискретности материи с тезисом об отсутствии пустоты, Декарт выдвигает любопытнейший тезис о нестабильности и отсутствии определенной формы у мельчайших частиц вещества. Единственным способом передачи взаимодействий между элементами и состоящими из их смешения вещами Декарт признает соударение. Оно происходит по законам постоянства, вытекающим из неизменной сущности Бога. При отсутствии внешних воздействий вещи не меняют свое состояние и двигаются по прямой, являющейся символом постоянства. Кроме того, Декарт говорит о сохранении исходного количества движения в мире. Само движение, однако, изначально не свойственно материи, а привносится в нее Богом. Но уже одного первотолчка достаточно, чтобы из хаоса материи постепенно самостоятельно собрался правильный и гармоничный космос.

Декарт изучал строение различных органов у животных, исследовал строение зародышей на различных стадиях развития. Его учение о «произвольных» и «непроизвольных» движениях заложило основы современного учения о рефлексах. В работах Декарта представлены схемы рефлекторных реакций с центростремительной и центробежной частью рефлекторной дуги.

Естественнонаучные достижения Декарта родились как «побочный продукт» разрабатываемого им единого метода единой науки. Декарту принадлежит заслуга создания современных систем обозначений: он ввел знаки переменных величин (x, y, z...), коэффициентов (a, b, c...), обозначение степеней (a^2, x^{-1}...). Декарт является одним из авторов теории уравнений: им сформулировано правило знаков для определения числа положительных и отрицательных корней, поставил вопрос о границах действительных корней и выдвинул проблему приводимости, т. е. представления целой рациональной функции с рациональными коэффициентами в виде произведения двух функций этого рода. Он указал, что уравнение 3-й степени разрешимо в квадратных радикалах (а также указал решение с помощью циркуля и линейки, если это уравнение приводимо). Декарт является одним из создателей аналитической геометрии (которую он разрабатывал одновременно с П. Ферма), позволявшей алгебраизировать эту науку с помощью метода координат. Предложенная им система координат получила его имя.

В работе «Геометрия» (1637), открывшей взаимопроникновение алгебры и геометрии, Декарт ввел впервые понятия переменной величины и функции. Переменная трактуется им двояко: как отрезок переменной длины и постоянного направления (текущая координата точки, описывающей своим движением кривую) и как непрерывная числовая переменная, пробегающая совокупность чисел, выражающих этот отрезок. В область изучения геометрии Декарт включил «геометрические» линии (позднее названные Лейбницем алгебраическими) — линии, описываемые при движении шарнирными механизмами. Трансцендентные кривые (сам Декарт называет их «механическими») он исключил из своей геометрии. В связи с исследованиями линз (см. ниже) в «Геометрии» излагаются способы построения нормалей и касательных к плоским кривым. «Геометрия» оказала огромное влияние на развитие математики. В декартовой системе координат получили реальное истолкование отрицательные числа. Действительные числа Декарт фактически трактовал как отношение любого отрезка к единичному (хотя саму формулировку дал позднее И. Ньютон). В переписке Декарта содержатся и другие его открытия. В оптике он открыл закон преломления световых лучей на границе двух различных сред (изложены в «Диоптрике», 1637). Декарт внес серьезный вклад в физику, дав четкую формулировку закона инерции.

Декарт оказал громадное влияние на последующую науку и философию. Европейские мыслители восприняли от него призывы к созданию философии как точной науки (Б. Спиноза), к построению метафизики на базе учения о душе (Дж. Локк, Д. Юм). Декарт активизировал и теологические споры в вопросе о возможности доказательств бытия Бога. Огромный резонанс имело обсуждение Декартом вопроса о взаимодействии души и тела, на которое откликнулись Н. Мальбранш, Г. Лейбниц и др., а также его космогонические построения.

Многие мыслители делали попытки формализовать методологию Декарта (А. Арно, Н. Николь, Б. Паскаль). В 20 веке к философии Декарта часто обращаются участники многочисленных дискуссий по проблемам философии сознания и когнитивной психологии.

Гюйгенс Христиан

(1629 г. – 1695 г.)

Голландский механик, физик и математик, создатель волновой теории света Христиан Гюйгенс ван Зюйлихем родился 14 апреля 1629 г. в Гааге в богатой и знатной семье крупного политического деятеля. Отец его был известным голландским поэтом и влиятельным государственным деятелем. Уже в ранние годы Гюйгенс проявил исключительные способности к математике. Учился в университетах Лейдена (1645-1647) и Бреды (1647-1649), где изучал юридические науки и математику. Уже в студенческие годы Гюйгенс приобрел известность среди математиков. В 1665-1681 гг. жил и работал в Париже, с 1681 г. – в Гааге. Первый иностранный член Лондонского королевского общества (с 1663).

Научную деятельность Гюйгенс начал в 22 года, опубликовав работу об определении длины дуг окружности, эллипса и гиперболы (1651). В 1654 г. появилась его работа «Об определении величины окружности», явившаяся важнейшим вкладом в теорию определения отношения окружности к диаметру (вычисление числа π). Затем последовали другие значительные математические трактаты по исследованию циклоиды, логарифмической и цепной линии и др.

В 1655 г. Гюйгенс защитил во Франции диссертацию на степень доктора права. Наряду с этим он много времени уделяет занятиям по оптике. Он изготовил телескоп, превзошедший по качеству все подобные приборы того времени. Гюйгенс совместно с Робертом Гуком установил постоянные точки термометра – точку таяния льда и точку кипения воды. В эти же годы Гюйгенс работает над усовершенствованием объективов астрономических труб, стремясь увеличить их светосилу и устранить хроматическую аберрацию. С их помощью Гюйгенс открыл в 1655 г. спутник планеты Сатурн (Титан), определил период его обращения и установил, что Сатурн окружен тонким кольцом, нигде к нему не прилегающим и наклонным к эклиптике. Все наблюдения приведены Гюйгенсом в классической работе «Система Сатурна» (1659). В этой же работе Гюйгенс дал первое описание туманности в созвездии Ориона и сообщил о полосах на поверхностях Юпитера и Марса.

Астрономические наблюдения требовали точного и удобного измерения времени. В 1657 г. Гюйгенс изобрёл первые маятниковые часы, снабженные спусковым механизмом; своё изобретение он описал в работе «Маятниковые часы» (1658). Второе, расширенное издание этой работы вышло в 1673 г. в Париже. В первых 4 частях её Гюйгенс исследовал ряд проблем, связанных с движением маятника. Он дал решение задачи о нахождении центра качания физического маятника – первой в истории механики задачи о движении системы связанных материальных точек в заданном силовом поле. В этой же работе Гюйгенс установил таутохронность движения по циклоиде и, разработав теорию эволют плоских кривых, доказал, что эволюта циклоиды есть также циклоида, но по-другому расположенная относительно осей.

В 1663 г. Гюйгенс был избран членом Лондонского королевского общества (Английской академии наук). Он был первым иностранным членом этого общества. В 1665 г., при основании Французской АН, Гюйгенс был приглашен в Париж в качестве её председателя, где и прожил почти безвыездно 16 лет (1665-1681). В 1668 г. Лондонское королевское общество предложило своим членам заняться решением задачи центрального удара. Гюйгенс оригинально решил эту задачу для упругих шаров. К парижскому периоду относится также написание трактата о свете. В работе «Маятниковые часы (1673 г.) он изложил теорию колебания маятника.3

В 1680 г. Гюйгенс работал над созданием «планетной машины» – прообраза современного планетария, – для конструкции которой разработал достаточно полную теорию цепных, или непрерывных, дробей. Это – последняя работа, выполненная им в Париже. В 1681 г., вернувшись на родину, Гюйгенс снова занялся оптическими работами. В 1681-1687 гг. он производил шлифовку объективов с огромными фокусными расстояниями в 37, 54, 63 м. Тогда же Гюйгенс сконструировал окуляр, носящий его имя, который применяется до сих пор. Весь цикл оптических работ Гюйгенса завершается знаменитым «Трактатом о свете» (1690). В нём впервые в совершенно отчётливой форме излагается и применяется к объяснению оптических явлений волновая теория света. В главе 5 «Трактата о свете» Гюйгенс дал объяснение явления двойного лучепреломления, открытого в кристаллах исландского шпата; классическая теория преломления в оптически одноосных кристаллах до сих пор излагается на основе этой главы. К «Трактату о свете» Гюйгенс добавил в виде приложения рассуждение «О причинах тяжести», в котором он близко подошёл к открытию закона всемирного тяготения. В своём последнем трактате «Космотеорос» (1698), опубликованном посмертно, Гюйгенс основывается на теории о множественности миров и их обитаемости. В 1717 г. трактат был переведён на русский язык по приказанию Петра I. Часть его трудов, в том числе результаты исследования об упругом ударе и о центробежной силе, были напечатаны после его смерти.

π ≈ 3,14…

Ньютон Исаак
(1643-1727)

НЬЮТОН (Newton) Исаак (1643-1727), английский математик, механик, астроном и физик, создатель классической механики, член (1672) и президент (с 1703) Лондонского королевского общества. Фундаментальные труды

«Математические начала натуральной философии» (1687) и «Оптика» (1704). Разработал (независимо от Г. Лейбница) дифференциальное и интегральное исчисления. Открыл дисперсию света, хроматическую аберрацию, исследовал интерференцию и дифракцию, развивал корпускулярную теорию света, высказал гипотезу, сочетавшую корпускулярные и волновые представления. Построил зеркальный телескоп. Сформулировал основные законы классической механики. Открыл закон всемирного тяготения, дал теорию движения небесных тел, создав основы небесной механики. Пространство и время считал абсолютными. Работы Ньютона намного опередили общий научный уровень его времени, были малопонятны современникам. Был директором Монетного двора, наладил монетное дело в Англии. Известный алхимик, Ньютон занимался хронологией древних царств. Теологические труды посвятил толкованию библейских пророчеств (большей частью не опубликованы).

* * *

НЬЮТОН (Newton) Исаак (4 января 1643, Вулсторп, близ Грантема, графство Линкольншир, Англия — 31 марта 1727, Лондон; похоронен в Вестминстерском аббатстве), один из основоположников современной физики, сформулировал основные законы механики и был фактическим создателем единой физической программы описания всех физических явлений на базе механики; открыл закон всемирного тяготения, объяснил движение планет вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, а также приливы в океанах, заложил основы механики сплошных сред, акустики и физической оптики.

Детские годы

Исаак Ньютон появился на свет в небольшой деревушке в семье мелкого фермера, умершего за три месяца до рождения сына. Младенец был недоношенным; бытует легенда, что он был так мал, что его поместили в овчинную рукавицу, лежавшую на лавке, из которой он однажды выпал и сильно ударился головкой об пол.

Когда ребенку исполнилось три года, его мать вторично вышла замуж и уехала, оставив его на попечении бабушки. Ньютон рос болезненным и необщительным, склонным к мечтательности. Его привлекала поэзия и живопись, он, вдали от сверстников, мастерил бумажных змеев, изобретал ветряную мельницу, водяные часы, педальную повозку. Трудным было для Ньютона начало школьной жизни. Учился он плохо, был слабым мальчиком, и однажды одноклассники избили его до потери сознания. Переносить такое унизительное положение было для самолюбивого Ньютона невыносимо, и оставалось одно: выделиться успехами в учебе. Упорной работой он добился того, что занял первое место в классе.

Интерес к технике заставил Ньютона задуматься над явлениями природы; он углубленно занимался и математикой. Об этом позже написал Жан Батист Био: «Один из его дядей, найдя его однажды под изгородью с книгой в руках, погруженного в глубокое размышление, взял у него книгу и нашел, что он был занят решением математической задачи. Пораженный таким серьезным и деятельным направление столь молодого человека, он уговорил его мать не противиться далее желанию сына и послать его для продолжения занятий». После серьезной подготовки Ньютон в 1660 поступил в Кембридж в качестве Subsizzfr'a (так назывались неимущие студенты, которые обязаны были прислуживать членам колледжа, что не могло не тяготить Ньютона).

Начало творчества. Оптика

За шесть лет Ньютоном были пройдены все степени колледжа и подготовлены все его дальнейшие великие открытия. В 1665 г. Ньютон стал магистром искусств.

В этом же году, когда в Англии свирепствовала эпидемия чумы, он решил временно поселиться в Вулсторпе. Именно там он начал активно заниматься оптикой; поиски способов устранения хроматической аберрации в линзовых телескопах привели Ньютона к исследованиям того, что теперь называется дисперсией, т. е. зависимости показателя преломления от частоты. Многие из проведенных им экспериментов (а их насчитывается более тысячи) стали классическими и повторяются и сегодня в школах и институтах.

Лейтмотивом всех исследований было стремление понять физическую природу света. Сначала Ньютон склонялся к мысли о том, что свет — это волны во всепроникающем эфире, но позже он отказался от этой идеи, решив, что сопротивление со стороны эфира должно было бы заметным образом тормозить движение небесных тел. Эти доводы привели Ньютона к представлению, что свет — это поток особых частиц, корпускул, вылетающих из источника и движущихся прямолинейно, пока они не встретят препятствия. Корпускулярная модель объясняла не только прямолинейность распространения света, но и закон отражения (упругое отражение), и — правда, не без дополнительного предположения — и закон преломления. Это предположение заключалось в том, что световые корпускулы, подлетая, к поверхности воды, например, должны притягиваться ею и потому испытывать ускорение. По этой теории скорость света в воде должна быть больше, чем в воздухе (что вступило в противоречие с более поздними экспериментальными данными).

Из «Оптики» И. Ньютона

Законы механики

На формирование корпускулярных представлений о свете явным образом повлияло, что в это время уже, в основном, завершилась работа, которой суждено было стать основным великим итогом трудов Ньютона — создание единой, основанной на сформулированных им законах механики физической картины Мира.

В основе этой картины лежало представление о материальных точках — физически бесконечно малых частицах материи и о законах, управляющих их движением. Именно четкая формулировка этих законов и придала механике Ньютона полноту и законченность. Первый из этих законов был, фактически, определением инерциальных систем отсчета: именно в таких системах не испытывающие никаких воздействий материальные точки движутся равномерно и прямолинейно. Второй закон механики играет центральную роль. Он гласит, что изменение количества, движения (произведения массы на скорость) за единицу времени равно силе, действующей на материальную точку. Масса каждой из этих точек является неизменной величиной; вообще все эти точки «не истираются», по выражению Ньютона, каждая из них вечна, т. е. не может ни возникать, ни уничтожаться. Материальные точки взаимодействуют, и количественной мерой воздействия на каждую из них и является сила. Задача выяснения того, каковы эти силы, является корневой проблемой механики.

Наконец, третий закон — закон «равенства действия и противодействия» объяснял, почему полный импульс любого тела, не испытывающего внешних воздействий, остается неизменным, как бы ни взаимодействовали между собой его составные части.

Определения Ньютона в «Началах»

Закон всемирного тяготения

Поставив проблему изучения различных сил, Ньютон сам же дал первый блистательный пример ее решения, сформулировав закон всемирного тяготения: сила гравитационного притяжения между телами, размеры которых значительно меньше расстояния между ними, прямо пропорциональна их массам, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль соединяющей их прямой. Закон всемирного тяготения позволил Ньютону дать количественное объяснение движению планет вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, понять природу морских приливов. Это не могло не произвести огромного впечатления на умы исследователей. Программа единого механического описания всех явлений природы — и «земных», и «небесных» на долгие годы утвердилась в физике. Более того, многим физикам в течение двух столетий сам вопрос о границах применимости законов Ньютона представлялся неоправданным.

Из 3 книги «Начал» И. Ньютона (О системе мира)

Лукасовская кафедра в Кембридже

В 1668 Ньютон вернулся в Кембридж и вскоре он получил Лукасовскую кафедру математики. Эту кафедру до него занимал его учитель И. Барроу, который уступил кафедру своему любимому ученику, чтобы материально обеспечить его. К тому времени Ньютон уже был автором бинома и создателем (одновременно с Лейбницем, но независимо от него) метода флюксий — того, что ныне называется дифференциальным и интегральным исчислением. Вообще, то был плодотворнейший период в творчестве Ньютона: за семь лет, с 1660 по 1667 сформировались его основные идеи, включая идею закона всемирного тяготения. Не ограничиваясь одними лишь теоретическими исследованиями, он в эти же годы сконструировал, и начал создавать телескоп-рефлектор (отражательный). Эта работа привела к открытию того, что позже получило название интерференционных «линий равной толщины». (Ньютон, поняв, что здесь проявляется «гашение света светом», не вписывавшееся в корпускулярную модель, пытался преодолеть возникавшие здесь трудности, введя предположение, что корпускулы в свете движутся волнами — «приливами»). Второй из изготовленных телескопов (улучшенный) послужил поводом для представления Ньютона в члены Лондонского королевского общества. Когда Ньютон отказался от членства, сославшись на отсутствие средств на уплату членских взносов, было сочтено возможным, учитывая его научные заслуги, сделать для него исключение, освободив его от их уплаты.

Будучи по натуре весьма осторожным (чтобы не сказать робким) человеком, Ньютон, помимо его воли оказывался порой втянутым в мучительные для него дискуссии и конфликты. Так, его теория света и цветов, изложенная в 1675, вызвала такие нападки, что Ньютон решил не публиковать ничего по оптике, пока жив Гук, наиболее ожесточенный его оппонент. Пришлось Ньютону принять участие и в политических событиях. С 1688 до 1694 он был членом парламента. К тому времени, в 1687 г. вышел в свет его основной труд «Математические начала натуральной философии» — основа механики всех физических явлений, от движения небесных тел до распространения звука. На несколько веков вперед эта программа определила развитие физики, и ее значение не исчерпано и поныне.

Болезнь Ньютона

Постоянное огромное нервное и умственное напряжение привело к тому, что в 1692 Ньютон заболел умственным расстройством. Непосредственным толчком к этому явился пожар, в котором погибли все подготавливавшиеся им рукописи. Лишь к 1694 он, по свидетельству Гюйгенса, «...начинает уже понимать свою книгу «Начала»».

Постоянное гнетущее ощущение материальной необеспеченности было, несомненно, одной из причин болезни Ньютона. Поэтому для него имело важное значение должность смотрителя Монетного двора с сохранением профессуры в Кембридже. Ревностно приступив к работе и быстро добившись заметных успехов, он был в 1699 назначен директором. Совмещать это с преподаванием было невозможно, и Ньютон перебрался в Лондон. В конце 1703 г. его избрали президентом Королевского общества. К тому времени Ньютон достиг вершины славы. В 1705 г. его возводят в рыцарское достоинство, но, располагая большой квартирой, имея шесть слуг и богатый выезд, он остается по-прежнему одиноким. Пора активного творчества позади, и Ньютон ограничивается подготовкой издания «Оптики», переиздания «Начал» и толкованием Священного Писания (ему принадлежит толкование Апокалипсиса, сочинение о пророке Данииле).

Ньютон был похоронен в Вестминстерском аббатстве. Надпись на его могиле заканчивается словам: «Пусть смертные радуются, что в их среде жило такое украшение человеческого рода».

Лейбниц

(1646-1716)

ЛЕЙБНИЦ (Leibniz) Готфрид Вильгельм (1646-1716), немецкий философ, математик, физик, языковед. С 1676 на службе у ганноверских герцогов. Основатель и президент (с 1700) Бранденбургского научного общества (позднее — Берлинская АН). По просьбе Петра I разработал проекты развития образования и государственного управления в России. Реальный мир, по Лейбницу, состоит из бесчисленных психических деятельных субстанций — монад, находящихся между собой в отношении предустановленной гармонии («Монадология», 1714); существующий мир создан богом как «наилучший из всех возможных миров» («Теодицея», 1710). В духе рационализма развил учение о прирожденной способности ума к познанию высших категорий бытия и всеобщих и необходимых истин логики и математики («Новые опыты о человеческом разуме», 1704). Предвосхитил принципы современной математической логики («Об искусстве комбинаторики», 1666). Один из создателей дифференциального и интегрального исчислений.

Отец Лейбница был университетским профессором морали, и его сын с юных лет проявил интерес к науке. После окончания школы Лейбниц продолжил образование в Лейпцигском (1661-66) и Йенском университете, где он провел один семестр в 1663, оказавшийся весьма полезным благодаря знакомству с идеями математика и философа Э. Вейгеля. В 1663 под руководством известного немецкого мыслителя Я. Томазия (отца К. Томазия) Лейбниц защитил тезисы работы «О принципе индивидуации» (выдержанной в духе номинализма и предвосхитившей некоторые идеи его зрелой философии), что принесло ему степень бакалавра. В 1666 в Лейпциге он пишет габилитационную работу по философии «О комбинаторном искусстве», в которой высказывается идея создания математической логики, а в начале 1667 года становится доктором права, представив диссертацию «О запутанных судебных случаях» в Альтдорфском университете.

Отказавшись от карьеры университетского профессора, Лейбниц в 1668 поступает на службу к майнцскому курфюрсту, при покровительстве барона И. Х. Бойенбурга (и в его министерство), с которым он познакомился в Нюрнберге. На этой службе он в основном выполняет поручения юридического характера, не прекращая, однако, и научных исследований. В 1671 Лейбниц публикует работу «Новая физическая гипотеза». В 1672 он прибывает в Париж с дипломатической миссией и остается там вплоть до 1676. В Париже он завязывает широкие знакомства с учеными и философами, активно занимается математическими проблемами, конструирует «компьютер» (усовершенствуя счетную машину Б. Паскаля), умеющий выполнять основные арифметические действия. В 1675 Лейбниц создает дифференциальное и интегральное исчисление, обнародовав главные результаты своего открытия в 1684, опережая И. Ньютона, который еще раньше Лейбница пришел к сходным результатам, но не публиковал их (хотя Лейбницу в приватном порядке были известны некоторые из них). Впоследствии на эту тему возник многолетний спор о приоритете открытия дифференциального исчисления.

Возвращаясь из Франции, Лейбниц посетил Англию и Нидерланды. В Нидерландах он познакомился с Б. Спинозой и несколько раз беседовал с ним. Большое впечатление произвели здесь на Лейбница и материалы исследований А. Левенгука, открывшего мир микроскопических живых существ.

В 1676. Лейбниц, вынужденный искать постоянные источники дохода, поступает на службу к ганноверским герцогам, которая продлилась около сорока лет. Круг обязанностей Лейбница был весьма широк — от подготовки исторических материалов и поисков общей основы для объединения различных христианских вероисповеданий до изобретения насосов для откачки воды из рудников.

Переписываясь с сотнями ученых и философов, Лейбниц вел также активную организационную работу, участвуя в создании ряда европейских Академий наук.

В 1686 Лейбниц пишет работу «Рассуждение о метафизике», ставшую важным этапом его творчества, так как именно здесь он впервые достаточно полно и систематично изложил принципы своей философской системы.

В 1697 г. Лейбниц знакомится с Петром I и впоследствии консультирует его по самым разным вопросам.

Последние пятнадцать лет жизни Лейбница оказались на редкость плодотворными в философском отношении. В 1705 он завершает работу над «Новыми опытами о человеческом разумении» (впервые опубликованы в 1765), уникальным комментарием к «Опыту о человеческом разумении» Дж. Локка, в 1710 издает «Опыты теодицеи», пишет «Монадологию» (1714), небольшой трактат, содержащий краткое изложение основ его метафизики. Важное значение для понимания поздней философии Лейбница имеет также его переписка с Н. Ремоном и особенно с ньютонианцем С. Кларком.

Смерть Лейбница в 1716 не вызвала почти никаких откликов со стороны научных обществ и Академий.

Лейбниц был исключительно эрудированным человеком в философии и во многих научных областях. Наибольшее влияние произвели на него философские идеи Р. Декарта, Т. Гоббса, Б. Спинозы, Н. Мальбранша, П. Бейля и др. Перенимая у них самое ценное, Лейбниц при этом вел активную полемику со всеми упомянутыми мыслителями. Большой интерес Лейбниц проявлял также к античной и средневековой философии, что было не совсем типично для философа Нового времени.

В течение всей своей философской биографии, а особенно с конца 1670-х гг., Лейбниц стремился осуществить алгебраизацию всего человеческого знания путем построения универсального «философского исчисления», позволяющего решить даже самые сложные проблемы посредством простых арифметических операций. При возникновении споров философам «достаточно было бы взять в руки перья, сесть за свои счетные доски и сказать друг другу (как бы дружески приглашая): давайте посчитаем!». Философское исчисление должно помогать как в формализации уже имеющегося знания (особое внимание Лейбниц уделал математизации силлогистики), так и в открытии новых истин, а также в определении степени вероятности эмпирических гипотез. Базисом философского исчисления является «искусство характеристики», т. е. отыскания символов (мыслившихся Лейбницем в виде чисел или же иероглифов), соответствующих сущностям вещей и могущих заменять их в познании.

Новаторские поиски основ «философского исчисления», которые, впрочем, так и не принесли конкретных результатов, Лейбниц совмещал с построением более традиционной методологии. Считая недостаточным картезианский критерий ясности и отчетливости, Лейбниц предлагал опираться в познании на законы тождества (или противоречия) и достаточного основания. Закон тождества является, по Лейбницу, общей формулой так называемых «истин разума», примером которых является сам закон тождества, геометрические аксиомы и т. д. «Истины разума» таковы, что противоположное им невозможно, т. е. содержит в себе противоречие и не может быть помыслено ясно и отчетливо. Подобные истины выражают «абсолютную», или «метафизическую» необходимость. Что же касается «истин факта» (являющихся выражением «физической» или «моральной» необходимости, не отрицающей свободу человеческой воли), к примеру, высказывания «солнце завтра взойдет», то они могут быть объяснены из принципа достаточного основания. Этот принцип распространяется Лейбницем не только на сферу знания, но и на бытие. В мире, полагает он, нет ничего, что не имело бы достаточного основания. Нередко Лейбниц трактует этот закон в «целевом» смысле, когда поиски достаточного основания сводятся к отысканию ответа на вопрос, почему данной вещи лучше быть именно такой, какая она есть. Закон достаточного основания широко используется Лейбницем для решения самых разных философских проблем: обоснования невозможности существования в мире двух одинаковых вещей (принцип «тождества неразличимых»), доказательства бытия Бога, утверждения наличного мира в качестве наилучшего и т. д. Методология Лейбница не лишена некоторых внутренних проблем, к примеру, из его рассуждений не совсем ясно, является ли принцип достаточного основания истиной разума или факта. Не менее двусмыслен и тезис Лейбница о том, что истины факта в потенциальной бесконечности являются истинами разума для человеческого ума, из чего следует, что в божественном интеллекте между ними вообще нет различия, что порождает ряд серьезных трудностей. В методологических вопросах Лейбниц стремился занять взвешенную позицию, пытаясь примирить противоположные взгляды. Он считал необходимым совмещать опытное знание с рациональными доводами, анализ с синтезом, исследование механических причин с поиском целевых оснований. Показательно отношение Лейбница к эмпирическому тезису Дж. Локка о том, что все человеческие идеи происходят из опыта. Лейбниц занимает компромиссную позицию, находя средний путь между рационализмом и эмпиризмом: «нет ничего в разуме, чего раньше не было бы в чувствах, кроме самого разума».

Основой метафизики Лейбница является учение о монадах. Монады — это простые субстанции. В мире нет ничего кроме монад. О бытии монад можно заключить из существования сложных вещей, о котором известно из опыта. Но сложное должно состоять из простого. Монады не имеют частей, они нематериальны и называются Лейбницем «духовными атомами». Простота монад означает, что они не могут распадаться и прекращать существование естественным путем. Монады «не имеют окон», т. е. изолированы и не могут реально воздействовать на другие монады, а также испытывать воздействие от них. Правда, это положение не распространяется на Бога как высшую монаду, наделяющую существованием все другие монады и гармонизирующую между собой их внутренние состояния. В силу «предустановленной гармонии» между монадами каждая из них оказывается «живым зеркалом универсума». Простота монад не означает отсутствия у них внутренней структуры и множественности состояний. Состояния, или перцепции монад в отличие от частей сложной вещи не существуют сами по себе и поэтому не отменяют простоту субстанции. Состояния монад бывают сознательными и бессознательными, причем не осознаются они в силу своей «малости». Сознание, впрочем, доступно не всем монадам. Рассуждая на эту тему в антропологическом контексте, Лейбниц допускал возможность влияния бессознательных представлений на поступки людей. Лейбниц констатировал далее, что состояния монад претерпевают постоянные изменения. Эти изменения могут быть обусловлены только внутренней активностью, стремлениями, или «аппетициями» монад. Несмотря на то, что Лейбниц пришел к системе монадологии во многом в результате размышлений над природой физических взаимодействий, моделью монады для него выступает понятие человеческой души. При этом человеческие души как таковые занимают лишь один из уровней мира монад. Фундамент этого мира составляют бесчисленные «единства», монады, лишенные психических способностей и представляющие собой океаны бессознательных перцепций. Выше них находятся животные души, обладающие чувством, памятью, воображением и аналогом разума, природа которого состоит в ожидании сходных случаев. Следующей ступенью мира монад являются человеческие души. Кроме перечисленных выше способностей, человек наделен также сознанием, или «апперцепцией». С апперцепцией связаны и другие высшие способности, рассудок и разум, позволяющие человеку отчетливо постигать вещи и открывающие ему сферу вечных истин и моральных законов. Лейбниц был уверен, что все монады, кроме Бога, связаны с телом. Смерть не разрушает тело, она есть только его «свертывание», так же как рождение — «развертывание». Тело — это государство монад, идеальным правителем которого является душа. При этом Лейбниц отрицает реальное существование телесной субстанции, т. е. материи. Материя есть лишь совокупность смутных перцепций, т. е. феномен, правда «хорошо обоснованный», так как этим перцепциям соответствуют реальные монады. Понятие степени ясности и отчетливости перцепций вообще играет важную роль в философии Лейбница, поскольку именно отчетливость восприятия собственных состояний монад является критерием их совершенства. Говоря на эту тему, Лейбниц проводит различие между ясными, отчетливыми и адекватными понятиями. Адекватным называется такое понятие, в котором нет ничего неотчетливого. Лишь в мышлении Бога нет ничего, кроме интуитивных адекватных понятий, или идей. Основой доказательств бытия Бога, используемых Лейбницем, является космологический (восходящий от мира к его достаточному основанию — Богу) и исправленный онтологический аргумент. Лейбниц принимает логику этого традиционного доказательства, выводящего из понятия Бога как всесовершенного существа тезис о том, что такое существо не может не существовать, так как иначе оно лишается всесовершенства, но замечает, что необходимым условием корректности этого вывода является непротиворечивость понятия Бога. О такой непротиворечивости, впрочем, по его мнению, свидетельствует то, что это понятие состоит из одних лишь положительных предикатов. Бог, как и всякая монада, имеет троичное устройство. Бытию в нем соответствует всемогущество, перцепциям — всезнание, стремлению — благая воля. Три этих качества соотносятся с тремя ипостасями христианского Божества, Отцом, Сыном и Святым Духом. При сотворении мира Бог, действуя по достаточному основанию, которое для него может быть только принципом блага, выбирает из множества возможных (т. е. непротиворечивых) миров, находящихся в его уме, наилучший и дает ему существование вне себя. Наилучшим Лейбниц называет такой мир, в котором максимально простые законы находят самое многообразное проявление. В подобном мире царствует всеобщая гармония, включающая гармонию «сущности и существования», а также «предустановленную гармонию» между перцепциями монад, душами и телами, добродетелью и вознаграждением и т. д. Тезис о том, что наш мир — наилучший из возможных, не означает для Лейбница признания актуальности всех его совершенств. Многим из них еще только предстоит осуществиться. Наилучший мир, однако, не может быть вообще лишен недостатков. В этом случае он не отличался бы от Бога, а это равносильно тому, что он не обладал бы самостоятельным существованием.

Основной заслугой Лейбница в области математики является создание (вместе с И. Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления. Первые результаты он получил в 1675 под влиянием Х. Гюйгенса. Огромную роль сыграли труды таких непосредственных предшественников Лейбница как Б. Паскаль (характеристический треугольник), Р. Декарт, Дж. Валлис и Н. Меркатор. В систематических очерках дифференциального (опубл. 1684) и интегрального (опубл. 1686) дал определение дифференциала и интеграла, ввел знаки d и t, привел правила дифференцирования суммы, произведения, частного, любой постоянной степени, функции от функции (инвариантности 1-го дифференциала), правило поиска экстремумов и точек перегиба (с помощью 2-го дифференциала). Лейбниц показал взаимно-обратный характер дифференцирования и интегрирования. Наряду с Гюйгенсом и Я. И. Бернулли в работах 1686-96 (задачи о циклоиде, цепной линии, брахистохроне и др.) Лейбниц вплотную подошел к созданию вариационного исчисления. В 1695 он вывел формулу для многократного дифференцирования произведения, получившую его имя. В 1702-03 вывел правила дифференцирования важнейших трансцендентных функций, положившие начало интегрированию рациональных дробей. Именно Лейбницу принадлежат термины «дифференциал», «дифференциальное исчисление», «дифференциальное уравнение», «функция», «переменная», «постоянная», «координаты», «абсцисса», «алгебраические и трансцендентные кривые», «алгоритм». Лейбниц сделал немало открытий и в других областях математики: в комбинаторике, в алгебре (начала теории определителей), в геометрии (основы теории соприкосновения кривых), одновременно с Гюйгенсом разрабатывал теорию огибающих семейства кривых и др. лейбниц выдвинул теорию геометрических счислений.

В логике, развивая учение об анализе и синтезе, Лейбниц впервые сформулировал закон достаточного основания, дал современную формулировку закона тождества. В «Об искусстве комбинаторики» (1666) предвосхитил некоторые моменты современной математической логики; он выдвинул идею о применении в логике математической символики и построении логических исчислений, поставил задачу логического обоснования математики. Лейбниць сыграл важную роль в истории создания электронно-вычислительных машин;

он предложил использовать для целей вычислительной математики бинарную систему счисления, писал о возможности машинного моделирования функций человеческого мозга. Лейбницу принадлежит термин «модель».

В физике Лейбницу принадлежит первая формулировка закона сохранения энергии («живых сил»). «Живой силой» (кинетической энергией) он назвал установленную им в качестве количественной меры движения единицу — произведение массы тела на квадрат скорости (в противоположность Декарту, который считал мерой движения произведение массы тела на скорость; Лейбниц назвал формулировку Декарта «мертвой силой»). Лейбниц сформулировал «принцип наименьшего действия» (впоследствии названного принципом Мопертюи) — один из основополагающих вариационных принципов физики. Лейбницу принадлежит ряд открытий в специальных разделах физики: теории упругости, теории колебаний и др.

В языкознании Лейбницу принадлежит историческая теория происхождения языков, их генеалогическая классификация. Им в основном создан немецкий философский и научный лексикон.

Собранный материал в области палеонтологии Лейбниц обобщил в работе «Протогея» (1693), где высказал мысль об эволюции земли.

Лейбниц оказал многообразное влияние на современную науку и философию. Лейбниц является одним из основателей современной математической логики. Он внес серьезный вклад в важнейший раздел физики — динамику. Он был также пионером в геологии. Но особым успехом пользовались его метафизические теории.

Вариньон Пьер

(1654-1722)

Французский математик и механик, член Французской АН (с 1688). Родился в Каенне. Примерно в одно время с Ньютоном изучал философию, механику и математику.

Первоначально Вариньон готовился стать служителем церкви, но изучая труды Евклида и Декарта, увлекся математикой и механикой и достиг на этом поприще крупных успехов.

В 1687 г. Вариньон представил академии первый проспект своего трактата по механике под названием «Проект новой механики».

С 1688 – профессор математики в Коллеже Мазарини, с 1704 – в Коллеж де Франс. Основные работы относятся к геометрии и статике. Исходя из теории сложных движений сформулировал (ок. 1710) закон параллелограмма сил. Развил понятие момента сил и предложил геометрическое доказательство теоремы о том, что момент равнодействующей двух сходящихся сил равен сумме моментов составляющих сил (теорема Вариньона). Его трактат “Новая механика, или статика”, проект которого был опубликован в 1686, был издан посмертно в 1725. Установил (1687) теорему о скользящих векторах для случая сходящейся системы сил.

Совокупность конкретных задач, решаемых Вариньоном на основе созданной им общей теории равновесия сил, достаточна разнообразна и охватывает круг вопросов, характерных для механической техники мануфактурного периода. Наиболее эффективны результаты, которые Вариньон получает, Разбирая задачи о равновесии различных веревочных машин, широко распространенных в технике парусного флота того времени. Именно здесь Вариньон ставит и решает общую задачу о равновесии веревочного многоугольника под действием заданных сил, приложенных в различных точках веревки. Тут же устанавливается связь самого веревочного многоугольника с многоугольником сил. Результаты этого рода открыли большие возможности для решения достаточно сложных задач статики чисто графическими методами. В дальнейшем это стало отправным пунктом развития так называемой графостатики, получившей большое прикладное техническое значение.

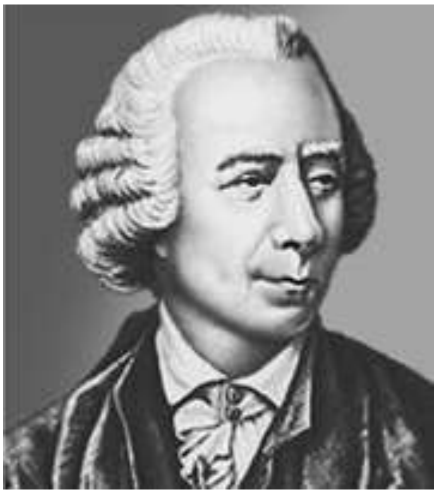
В этом же трактате Вариньон дал весьма общую формулировку принципа возможных перемещений и рассмотрел ряд конкретных приложений этого принципа к различным задачам.

В целом трактат Вариньона явился весьма систематическим и содержательным изложением основных законов геометрического варианта технической статики. Позднейшие изложения геометрической статики в 18 и 19 веках в ряде отношений используют немало идей из статики Вариньона.

Одним из первых начал пользоваться математическим анализом. Изучал равновесие и движение жидкости. Дал объяснение закона Торричелли. Полагая, что вес колонны воды пропорционален высоте h, нашел выражение для закона

Торричелли.

Эйлер Леонард
(1707-1783)



ЭЙЛЕР (Euler) Леонард (1707-1783), математик, механик, физик и астроном. По происхождению швейцарец.

Эйлер родился в швейцарском городе Базеле, в семье небогатого пастора Пауля Эйлера. Образование получил сначала у отца, который в молодости занимался математикой под руководством Я. Бернулли. В 1720 г. поступил в Базельский университет, где спустя четыре года произнес речь, посвященную сравнению философии Декарта и Ньютона, и был удостоен степени магистра искусств. С конца 1723 г. по настоянию отца стал изучать богословие, но вскоре целиком отдался изучению любимой им математике. В Базельском университете

Эйлер слушал лекции по математике Иоганна Бернулли, но особенное значение имели беседы, проводимые с ним Бернулли по субботам в течении нескольких лет. В 1725 г. два друга Эйлера, сыновья его учителя – Даниил и Николай Бернулли, не найдя применения своим силам в Базеле, приняли приглашение только что организованной Академии наук в Петербурге. В 1726 был приглашен в Петербургскую АН и переехал в 1727 в Россию. Был адъюнктом (1726), а в 1731 г. возглавил кафедру теоретической и экспериментальной физики. С 1733 г. он руководит кафедрой высшей математики, получив звание профессора и академика (в 1742-66 иностранный почетный член).

В 1741-66 работал в Берлине, занимая там должность президента физико-математического класса Академии наук.

В Петербургской академии наук Эйлер остается почетным иностранным членом, продолжая выполнять задания этой Академии и печатать свои труды в ее изданиях. В 1766 г. Эйлер возвращается из Берлина в Петербург, где проводит последнюю часть своей жизни, не прекращая активной и плодотворной научной работы, не смотря на потерю зрения, отягчившую конец его жизни и деятельности.

В Петербурге Эйлер нашел весьма благоприятные условия для научной деятельности: материальную обеспеченность, широкую возможность публикации трудов, круг ученых с общими интересами в лице Д. Бернулли, Я. Германа и др.

Эйлер принадлежал к числу тех немногих иностранных деятелей Петербургской академии наук, которые относились к своим обязанностям добросовестно, стремясь содействовать ее процветанию. Об Эйлере можно с определенностью сказать, что в России он обрел вторую родину, связав свою научную работу и деятельность по подготовке молодых научных кадров прочнейшими узами. Это высоко ценил в Эйлере и его современник М. Ломоносов, широко пользовавшийся помощью Эйлера в деле подготовки молодых русских ученых в области математики и механики, которые образовали во второй половине 18 века самобытную русскую школу теоретической механики, школу Ломоносова – Эйлера.

В Петербурге Эйлер изучил русский язык. В 1733 г. он женился на дочери академического живописца Гаелля, в Петербурге же родились два его сына, впоследствии (более из уважения к заслугам отца), состоявшие членами Петербургской академии наук: математик и механик Иоганн Альбрехт и врач Карл. Третий сын Кристоф, служа в армии, достиг чина генерал – лейтенанта от артиллерии и был директором оружейного завода в г. Сестрорецке. Эйлер — ученый необычайной широты интересов и творческой продуктивности. Он обладал фантастической работоспособностью и научной продуктивностью, и в это мало кто из великих может с ним сравниться. Автор св. 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки.

Для развития классической аналитической небесной механики имели фундаментальное значение трактаты Эйлера «Теория движения Луны», «Новая теория движения Луны», «Теория движения планет и комет».

Для развития аналитической теории устойчивости в 18 веке важен трактат Эйлера «Корабельная наука».

Наконец, для развития классической аналитической теории движения материальной точки и твердого тела основополагающую роль сыграли трактаты «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» и «Теория движения твердых или жестких тел».

Около 3/5 работ Эйлера относятся к математике, остальные 2/5 – преимущественно к ее приложению.

Русские математики и механики высоко ценили творчество Эйлера за постоянное чувство конкретности, интерес к наиболее трудным задачам, требующим развития новых методов, стремление получать решение задач в форме законченных алгоритмов, позволяющих находить ответ с любой требуемой точностью.

Даламбер Жан

(1717-1783)

Д"Аламбер (D"Alembert) Жан Лерон (1717-83), французский математик, механик и философ-просветитель, иностранный почетный член Петербургской АН (1764). В 1751-57 вместе с Д. Дидро редактор 'Энциклопедии'. Сформулировал правила составления дифференциальных уравнений движения материальных систем (см. Д"Аламбера принцип). Обосновал теорию возмущения планет. Труды по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, теории рядов, алгебре.

Д"Аламбер был незаконнорожденным отпрыском знатных родителей. Его мать, маркиза де Тансен, отказалась от него уже через несколько часов после того, как произвела его на свет. Он был найден в деревянном коробе на ступенях парижской церкви Сен-Жан-ле-Рон и поэтому при крещении получил имя Жан Ле Рон (Лерон). Его отец, шевалье Луи-Камю Детуш-Канон, генерал-лейтенант французской артиллерии, передал малыша на воспитание жене стекольщика. Он заплатил за его обучение в небольшом частном пансионе Берэ, а затем - в янсенистском коллеже Катр Насьон, в который юноша поступил в 1730. Блестящие успехи в учебе привлекли к нему внимание наставников, рассчитывавших, что столь возвышенный ум изберет церковную карьеру. Однако Д"Аламбер не оправдал их ожиданий. Получив в 1735 степень магистра искусств, он занялся правом. В 1738 он закончил в Париже юридический факультет, затем в течение нескольких месяцев посещал занятия на медицинском факультете, но разочаровался в медицине, как прежде в теологии и юриспруденции. Наконец, в 1739 он нашел свое призвание - математику.

В 1741 он представил парижской Королевской Академии наук свои первые сочинения и был принят в качестве ассистента. Его знаменитый 'Трактат о динамике' (1743) впервые сформулировал законы движения и способствовал систематизации классической механики. На следующий год он опубликовал 'Трактат о равновесии и движении жидкостей' (1744). Эти работы принесли ему успех, и уже в 1746 он стал членом-корреспондентом Академии наук.

Примерно в тоже самое время Д"Аламбер начал посещать парижские салоны. Остроумие, умение поддерживать живую и занимательную беседу делали Д"Аламбера повсюду желанным гостем, несмотря на его тонкий голос, малый рост, заурядную внешность и 'незаконное' происхождение.

Следующие десять лет были самыми плодотворными в его жизни. Он опубликовал 'Размышления об общей причине ветров' (1747), которые произвели революцию в применении дифференциальных уравнений; 'Исследования о предварении равноденствий' (1749), которые способствовали разрешению сложной математической задачи, поставившей в тупик И. Ньютона; 'Опыт новой теории сопротивления жидкостей' (1752), ставшей этапом в развитии гидродинамики. Затем последовали фундаментальные исследования, обосновавшие теорию возмущения небесных тел (1754-1756). Благодаря этим работам Д"Аламбер приобрел славу одного из выдающихся физиков и математиков своего времени.

С 1745 Д"Аламбер принял активное участие в создании 'Энциклопедии'. Он вместе с Дидро возглавил издание. В 'Предварительном рассуждении', открывавшем первый том, Д"Аламбер обосновал методологическую плодотворность эмпиризма и сенсуализма для прогресса наук и ремесел. Отвечая за разделы по математике, физике, астрономии и музыке (только из под его пера вышло ок. 1600 статей), он написал и такие статьи, как 'Коллеж' и 'Женева', укрепивших репутацию 'Энциклопедии' как грозного оружия борьбы со старым порядком.

Работая над 'Энциклопедией', Д"Аламбер опубликовал 'Элементы музыкальной теории и практики, вытекающие из принципов г-н Рамо' (1753), популяризировавшие и развивавшие теорию музыкальной гармонии Ж. Ф. Рамо. Затем вышли его многотомные 'Размышления о литературе. истории и философии' (1753). Таким образом, Д"Аламбер составил себе имя и в литературе, и в теории музыки, а известность его вышла далеко за рамки научных кругов. В 1754 при поддержке влиятельной маркизы Дю Деффан он был избран членом Французской Академии. Однако некоторые произведения Д"Аламбера доставили ему не только почести, но и немало хлопот. Несмотря на то, что Д"Аламбер в своих энциклопедических статьях и других работах в целом высоко оценивал творчество Рамо, этот композитор в 1755 опубликовал критические замечания на статьи 'Энциклопедии', посвященные музыке.

Д"Аламбера часто обвиняли и в том, что его статьи подрывают основы религии. Он собирался покинуть издание еще в 1752, но решился на это лишь в 1758-59: после публикации в 7 томе (1757) статьи 'Женева', написанной по совету Вольтера, на него обрушился шквал критики - как со стороны кальвинистов, так и католиков. Уход из 'Энциклопедии' ухудшил и без того непростые отношения Д"Аламбера с Дидро. Впрочем, в 1759 он вернулся в 'Энциклопедию', но лишь как автор естественнонаучных статей; главной причиной его возвращения была постоянная нужда в средствах.

Финансовое положение Д"Аламбера стало улучшаться в середине 1760-х годов. С 1765 он стал регулярно получать стипендию Академии наук. Его доходы пополнялись авторскими гонорарами, пенсионами от Людовика XV и Фридриха II, а также унаследованной от отца пожизненной рентой и ежегодной рентой, выплачиваемой ему хозяйкой известного парижского салона мадам Жоффрен.

Примерно в это же время Д"Аламбер, заботясь о своей независимости, отклонил два чрезвычайно заманчивых предложения. Первое исходило от Фридриха II. Д"Аламбер познакомился с ним в 1755, хотя его научные труды получили признание в Пруссии еще раньше: в 1746 'Размышления об общей причине ветров' были удостоены премии Берлинской Академии наук и изящной словесности. С 1752 Фридрих II неоднократно пытался пригласить Д"Аламбера в Пруссию в качестве президента этой Академии, но тот регулярно отказывался. В результате с 1760 между ними завязалась знаменитая переписка, продолжавшаяся до смерти ученого. Д"Аламбер был весьма высокого мнения о прусском монархе, восхвалял его в своих сочинениях, а в 1763 гостил у него при дворе в течении трех месяцев.

Едва взойдя на престол в 1762, Екатерина II попросила Д"Аламбера заняться воспитанием ее сына и наследника Павла, предложив ему громадный годовой оклад в 100 тыс. ливров (от французского и прусского королей он получал ежегодно по 1200 ливров). Д"Аламбер ответил отказом, объяснив, что предпочитает скромно жить у себя на родине, чем наслаждаться роскошью на чужбине. Отказав Фридриху и Екатерине, Д"Аламбер, тем не менее, возлагал все надежды на обновление Европы именно на просвещенных монархов, поддерживаемых интеллектуальной элитой. Вместе с тем он с равным недоверием относился к аристократии, духовенству и народным массам.

Д"Аламбер отказывался покинуть Париж из-за своей связи с Жюли де Леспинас, компаньонкой маркизы Дю Деффан. Их отношениям не помешала ни разница в возрасте (Д"Аламбер был на 15 лет старше), ни ревность мадам Дю Деффан. Однако Жюли не всегда была верна Д"Аламберу. В 1764 мадемуазель де Леспинас основала свой собственный салон.

Обремененный тяжкими недугами, переживая измены, а затем и смерть своей возлюбленной (1776), Д"Аламбер на протяжении 1770-х годов постоянно находился в болезненно возбужденном состоянии. Последние годы жизни Д"Аламбера были связаны с Французской Академией. В 1772, несмотря на сопротивление Людовика XV, он был избран ее непременным секретарем. Произнесенные им в стенах Академии речи показывают, что он считал это учреждение важным оплотом борьбы с невежеством. Скептически относясь к религии на протяжении всей жизни, Д"Аламбер встретил смерть, не изменив себе, и отказался от последнего причастия. Парижский архиепископ запретил служить по нем заупокойную службу.

Кулон Шарль

(1736-1806)

КУЛОН (Coulomb) Шарль Огюстен (1736-1806), французский инженер и физик, один из основателей электростатики. Исследовал деформацию кручения нитей, установил ее законы. Изобрел (1784) крутильные весы и открыл (1785) закон, названные его именем. Установил законы сухого трения. Член Парижской академии наук.

Его отец, Анри Кулон, правительственный чиновник, вскоре после рождения Шарля переехал с семьей в Париж, где некоторое время занимал доходную должность по сбору налогов, но, пустившись в спекуляции, разорившие его, вернулся на родину, на юг Франции, в Монпелье. Шарль с матерью остался в Париже. В конце 1740-х годов его поместили в одну из лучших школ того времени для молодых людей дворянского происхождения — «Коллеж четырех наций», известный также как Коллеж Мазарини. Уровень преподавания там был достаточно высок, в частности, большое внимание уделялось математике. Во всяком случае, юный Шарль настолько увлекся науками, что решительно воспротивился намерениям его матери избрать для него профессию медика, или, в крайнем случае, юриста. Конфликт стал настолько серьезен, что Шарль покинул Париж и переехал к отцу в Монпелье.

В этом городе еще в 1706 г. было основано научное общество, второе после столичной академии. В феврале 1757 г. 21-летний Кулон прочитал там свою первую научную работу «Геометрический очерк среднепропорциональных кривых» и вскоре был избран адъюнктом по классу математики.

Но это приносило лишь моральное удовлетворение, нужно было выбирать дальнейший путь. Посоветовавшись с отцом, Шарль избрал карьеру военного инженера. Научное общество Монпелье снабдило Кулона нужными рекомендациями, и после сдачи экзаменов (достаточно трудных, так что подготовка к ним потребовала девяти месяцев занятий с преподавателем) Шарль Кулон в феврале 1760 г. направился в Мезьер, в Военно-инженерную школу, одно из лучших высших технических учебных заведений того времени. Обучение велось там с отчетливо выраженным практическим уклоном: кроме математики, физики и других «теоретических предметов», изучались многие чисто-прикладные дисциплины — от строительного дела и того, что теперь назвали бы «материаловедением», до вопросов организации труда (слушателям поручалось руководство бригадами крестьян, мобилизованных на общественные работы). Кулон окончил Школу в 1761.

Хотя отзыв о нем руководителя Школы выглядит местами отнюдь не восторженно («Его работа об осаде хуже средней, рисунки сделаны очень плохо, с подчистками и пометками... Он полагает, как и другие со сходным образом мыслей, что древесину для лафетов и повозок можно просто найти в лесу...»), он, вероятно, был среди лучших выпускников (отмечен денежной премией).

Получив чин лейтенанта, Шарль Кулон был направлен в Брест, один из крупных портов на западном побережье Франции. В Бресте Кулону были поручены картографические работы, связанные с возведением и перестройкой укреплений на побережье. Но эта деятельность была довольно непродолжительной.

Меньше, чем через два года Кулону пришлось экстренно включиться в работы по возведению крепости на о. Мартиника в Вест-Индии для защиты его от англичан. Объявленный конкурс на проект укрепления выиграл опытный военный инженер де Рошмор, но этот проект вызвал большой спор, в который был вовлечен и Кулон. Хотя проект в целом и удалось отстоять, но в него пришлось внести значительные изменения; в частности, ассигнования были уменьшены более чем в два раза. Кулон, оставшийся фактическим руководителем строительства, под началом которого работало почти полторы тысячи человек, оказался перед лицом множества весьма сложных, и далеко не только технических задач. Условия работы были трудными, климат очень тяжелым, людей не хватало, да и те, кто оставался, тяжело болели. Сам Кулон за восемь лет работы на острове тяжело болел восемь раз и впоследствии вернулся во Францию с сильно подорванным здоровьем. Приобретенный им большой опыт достался дорогой ценой.

Вернувшись во Францию, Кулон в 1772 г. получает назначение в Бушен. Условия работы здесь были несравненно более легкие, и появилась возможность вновь активно продолжить научную деятельность. Задачи, которые он решал, относятся к той области, которую назвали бы теперь строительной механикой и сопротивлением материалов. Уже в то время эта область привлекала большое внимание многих физиков и математиков. После возвращения на родину, Кулон, проведя еще довольно большое число новых исследований, послал свой мемуар в Парижскую академию наук, а затем зачитал его на двух заседаниях в марте и апреле 1773. Об этом труде весьма похвально отозвались два академика, которым было поручено его рецензирование (одного из них, Борда, Кулон впоследствии спасал в период якобинской диктатуры, пряча его в своем поместье). Для автора это было большой поддержкой.

Но вскоре он увлекся новыми проблемами. В 1775 Парижская академия наук объявила конкурсную задачу: «Изыскание лучшего способа изготовления магнитных стрелок, их подвешивания и проверки совпадения их направления с направлением магнитного меридиана и, наконец, объяснение их регулярных суточных вариации». Что касается последней части задачи, ее решение в то время было явно недоступно (даже о самой причине существования магнитного поля Земли не только тогда, но даже и теперь известно не все!), но вот задача о наилучшем устройстве компаса и, в частности, подвеса магнитной стрелки была актуальна. Она увлекла Кулона.

О том, насколько эта задача была непроста, какую высокую точность требовалось обеспечивать, можно судить хотя бы по следующему факту: подвешенная на тонкой шелковой нити стрелка так чувствительно реагировала на все воздействия, что приходилось защищать ее не только от слабейших воздушных потоков, но даже и от приближения глаза наблюдателя (на стрелке и на теле человека всегда могут оказаться электрические заряды, и их взаимодействие может сказаться на силах). Чтобы исключить это, Кулон решил заменить шелковые нити металлической проводящей электричество проволокой. Это был шаг, сыгравший в дальнейшем очень большую роль, когда Кулон изобрел и начал использовать крутильные весы. Но пока до этих работ было еще далеко. В 1777 Кулон становится победителем конкурса, посвященного разработке прибора для исследования магнитного поля Земли, и тут же погружается в другую большую работу: в исследование трения. В 1779 (а затем, повторно, в 1781) академия объявила еще один конкурс, посвященный именно трению. Уже в 1780 Кулон представил в академию конкурсную работу «Теория простых машин», которая через год также была удостоена премии. Результаты этой работы базировались на многочисленных экспериментах Кулона, в которых исследовалось как трение между твердыми телами, так и трение в жидкостях и газах. Эти работы Кулон проводил уже в Лилле, куда он был переведен в начале 1780 г. Примерно через год исполнилось его давнишнее желание: произошел перевод в Париж, где 12 декабря 1781 он был избран в академики по классу механики.

В столице на Кулона почти сразу же обрушилось множество дел, в том числе, и административных. Некоторые из них имели и политическую окраску, и одно из них даже закончилось для Кулона недельным заключением в тюрьму аббатства Сен-Жермен де Пре. Заседания в многочисленных комиссиях, в частности, в Комиссии по каналам в Бретани, оставляли мало времени для науки, и, тем не менее, Кулон представил в 1784 в академию свою работу, которую можно считать весьма важной: мемуар о кручении тонких металлических нитей, а 1785-89 гг. — серию мемуаров по электричеству и магнетизму.

Исследование кручения нитей может показаться имеющим лишь вспомогательное «техническое» значение, но без него были бы невозможны дальнейшие количественные измерения силы взаимодействия электрических зарядов и магнитных полюсов. Как и всегда, труд Кулона отличался глубиной и изобретательностью. Так, диаметр очень тонких нитей определялся Кулоном взвешиванием и измерением их длины. Многое из того, что вошло в классические исследования Кулона, можно теперь заметить и в трудах некоторых его предшественников. Так, крутильные весы использовал еще в 1773 выдающийся английский ученый Генри Кавендиш, но он не печатал своих трудов, они были опубликованы лишь столетие спустя.

Важным для решения всей проблемы моментом явилось то, что Кулон понял: нужно исследовать взаимодействие «точечных» заряженных тел, т.е. таких, расстояния между которыми значительно превосходит их размеры.

Впрочем, «закон обратных квадратов» уже давно казался многим почти очевидным. И дело здесь не только в гипнотизирующем примере закона всемирного тяготения великого Ньютона; другой закон не позволил бы объяснить множество наблюдаемых фактов (например, почему внутри ящика с проводящими стенками, какой бы заряд на него ни помещался, никакое электрическое поле не ощущается).

Закон Кулона известен теперь, наверное, любому школьнику. Но вряд ли многим известно, какое искусство и наблюдательность пришлось проявить исследователю.

Кулон заметил попутно, что заряды довольно быстро «стекают» с тел, и правильно объяснил это тем, что воздух обладает некоторой проводимостью; это обстоятельство осложняло эксперимент, но оно само стало важным открытием. Многие знают, что закон взаимодействия магнитных полюсов, также тщательно изученный Кулоном, внешне очень похож на закон взаимодействия электрических зарядов. Из- за этого электростатика и магнитостатика долго представлялись во всем подобными друг другу, если не считать того удивительного факта, что «магнитные заряды» противоположных знаков почему-то всегда встречаются попарно и никогда — по отдельности. Лишь после работ Ампера выяснилось, что магнитные поля постоянных магнитов обусловлены не тем, что они состоят из огромного числа маленьких магнитиков (как, заметим, полагал и Кулон), а электрическими токами, т.е. движением электрических зарядов.

Современную классическую (т.е. неквантовую) теорию электрических и магнитных явлений часто называют электродинамикой Фарадея и Максвелла. Конечно, в написании этой важнейшей главы физики почетное место занимают и многие другие замечательные ученые, и в числе первых здесь по праву должно быть упомянуто имя Шарля Кулона.

Лагранж Жозеф Луи

(1736-1813)

ЛАГРАНЖ (Lagrange) Жозеф Луи (25 января 1736, Турин — 10 апреля 1813, Париж), французский математик и механик, иностранный почетный член Петербургской АН (1776).

Жозеф Луи Лагранж родился в семье обедневшего чиновника в Турине. В 17 лет он уже преподавал в артиллерийской школе Турина. В 1754 в возрасте 18 лет стал профессором артиллерийской школы Турина. Организовал кружок, из которого впоследствии выросла Туринская академия наук. Академия издавала публикации Лагранжа — в том числе по математическим проблемам азартных игр, движения жидкостей, сотрясения струн. В 1766 стал президентом Берлинской академии наук, в 1787 — действительным членом Парижской академии наук. В 1788 г. Лагранж переехал в Париж; с 1795 г. – профессор знаменитой Нормальной школы, с 1797 года – профессор Политехнической школы.

Участвовал в разработке метрической системы мер в парижском Институте и Бюро долгот. В книге Лагранжа «Аналитическая механика» (1788) все основные результаты им получены при помощи одного общего метода, называемого принципом возможных перемещений. В предисловии к этой книге Лагранж пишет: «В этой работе отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мной методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все, любящие анализ, с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения».

Во время Великой французской революции (1789) получил должность сенатора.

Автор трудов по вариационному исчислению, где им разработаны основные понятия и методы, математическому анализу, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям. В трактате «Аналитическая механика» (1788) в основу статики положил принцип возможных перемещений, в основу динамики — сочетание этого принципа с принципом Д'Аламбера (принцип Д'Аламбера — Лагранжа), придал уравнениям движения формулу, названную его именем. Уравнение Лагранжа используется в гидродинамике и общей механике. Его сочинения по математике, астрономии и механике составляют 14 томов.

Аналитические методы, предложенные Лагранжем, обладают весьма большой общностью и математической строгостью; их дальнейшее развитие привело к установлению ряда дифференциальных и вариационных принципов механики, из которых основные теоремы механики Ньютона получаются при частных предложениях.

Лагранжу принадлежат также выдающиеся исследования по различным вопросам математического анализа (формула остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных превращений, теория условных экстремумов), теория чисел, алгебры (теория и приложения непрерывных дробей), по дифференциальным уравнениям (метод вариации постоянных), по интерполированию, математической картографии и др.

Пьер Симон Лаплас
(1749-1827)

Французский астроном, математик, физик, иностранный почётный член Петербургской АН (1802). Автор классических трудов по теории вероятностей и небесной механике (динамика Солнечной системы в целом и её устойчивость и др.): сочинения «Аналитическая теория вероятностей» (1812) и «Трактат о небесной механике» (т. 1-5, 1798-1825); много трудов по дифференциальным уравнениям, математической физике, теории капиллярности, теплоте, акустике, геодезии и др. Предложил (1796) космогоническую гипотезу (гипотеза Лапласа). Классический представитель механистического детерминизма.

Пьер Симон родился в семье небогатого крестьянина. Окончил школу бенедиктинцев и был оставлен там же, в Бомоне, преподавателем математики военной школы. В семнадцать лет написал свою первую научную работу. В 1766 он отправился в Париж. Там он получил место преподавателя математики в Военной школе Парижа. В 1773 Лаплас становится адъюнктом, а в 1785 действительным членом Парижской академии. В 1784 Лапласа сделали экзаменатором королевского корпуса артиллеристов.

8 мая 1790 Национальное собрание Франции поручило Академии наук создать систему мер и весов "на все времена и для всех народов". Председателем Палаты мер и весов был назначен Лаплас. В 1795 вместо Академии наук Конвент создал Национальный институт наук и искусств. Лаплас становится членом Института и возглавляет Бюро долгот, которое занималось измерением длины земного меридиана. На другой день после переворота 18 брюмера Наполеон назначил Лапласа министром внутренних дел. В 1803 Наполеон сделал Лапласа вице-президентом сената, а через месяц - канцлером. В 1804 он получил орден Почётного легиона.

С 1801 по 1809 год Лаплас был избран членом королевских обществ в Турине и Копенгагене, академий наук в Гёттингене, Берлине и Голландии. 13 октября 1802 Лаплас стал почётным членом Петербургской академии наук. "Аналитическая теория вероятностей" Лапласа издавалась трижды при жизни автора (в 1812, 1814, 1820 годы). Для разработки созданной им математической теории вероятностей Лаплас ввёл так называемые производящие функции. Он привёл полученные другими учёными результаты в стройную систему, упростил методы доказательства, для чего широко применял преобразование и доказал теорему об отклонении частоты появления события от его вероятности. Благодаря ему теория вероятностей приобрела законченный вид.

В физике Лаплас вывел формулу для скорости распространения звука в воздухе, создал ледяной калориметр, получил барометрическую формулу для вычисления изменения плотности воздуха с высотой, учитывающую его влажность. Он выполнил ряд работ по теории капиллярности и установил закон, который позволяет определить величину капиллярного давления и тем самым записать условия механического равновесия для подвижных (жидких) поверхностей раздела. Первая его работа по небесной механике вышла в 1773 году. Она называлась "О причине всемирного тяготения и о вековых неравенствах планет, которые от него зависят". В 1780 Лаплас предложил новый способ вычисления орбит небесных тел. Лаплас доказал устойчивость Солнечной системы. Он показал, что средняя скорость движения Луны зависит от эксцентриситета земной орбиты, а тот, в свою очередь, меняется под действием притяжения планет. По неравенствам движения Луны он определил величину сжатия Земли у полюсов. Лаплас пришёл к выводу, что кольцо Сатурна не может быть сплошным, иначе оно было бы неустойчивым; предсказал сжатие Сатурна у полюсов; установил законы движения спутников Юпитера. Полученные результаты были опубликованы Лапласом в его самом известном пятитомном классическом сочинении "Трактат о небесной механике" (1798-1825). Космогоническая гипотеза Лапласа была опубликована в 1796 в приложении к его книге "Наложение системы мира". По ней, солнечная система образовалась из туманности, состоявшей из раскалённого газа и простиравшейся за пределы орбиты самой дальней планеты. Вращательное движение охлаждавшейся и сжимавшейся туманности обусловливало её сплющивание. В процессе этого сплющивания возникала центробежная сила, под влиянием которой от туманности по её краю отделялись кольца газовой материи, собравшиеся затем в комки и давшие начало планетам и их спутникам.

После реставрации монархии Лаплас пользовался благосклонностью Людовика XVIII. Король сделал его пэром Франции и пожаловал титул маркиза. В 1817 году Лаплас стал членом вновь созданной Французской академии, т.е. одним из сорока бессмертных. Умер учёный после недолгой болезни 5 марта 1827 года. Его последние слова были: ***"То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, что мы не знаем".***

Карно Лазар

(13.5.1753 — 2.8.1823)

Карно (Carnot) Лазар Никола́), французский государственный и военный деятель, математик военный инженер родился в Ноле. В 1771 г. поступил в Мезьерскую инженерную школу, где учился у Гаспара Монжа. Член Института Франции (1796). Член Законодательного собрания (1791–92) и Конвента (1792–95). Карно с большим энтузиазмом встретил Великую французскую революцию и сыграл в ней и последующих событиях выдающуюся роль. В период якобинской диктатуры был член Комитета общественного спасения (с 1793) и выдвинулся как крупный военный организатор борьбы с интервентами и роялистами («организатор победы», как называли его современники). В период термидорианского переворота (июль 1794) выступал против М. Робеспьера. В 1795–97 Карно – член Директории. После переворота 18 фрюктидора бежал за границу. В 1800 вернулся во Францию. В апреле – августе 1800 был военным министром. Карно создал 14 армий французской республики, разработал планы ряда военных кампаний и осуществлял руководство ими. Член Трибуната (с марта 1802), К. голосовал против империи, оставаясь при этом приверженцем Наполеона. Во время «Ста дней» (1815) был министром внутренних дел в наполеоновском правительстве; получил титул графа. После второй реставрации Бурбонов был изгнан в 1815 из Франции.

В 1816 г., после Реставрации королевской власти, Карно был выслан из Франции, жил в Варшаве, затем в Магдебурге, где и умер. В 1883 г. его останки перезахоронены в Париже.

Математические труды Карно относятся к анализу и геометрии. В «Размышлениях о метафизике исчисления бесконечно малых» (1797) сделал попытку обосновать правильность результатов этого исчисления. Разбор Карно различных способов обоснования анализа – метода исчерпывания, неделимых, пределов и его критика теории аналитических функций Лагранжа отчасти подготовили реформу анализа в начале 19 в.; в работах «О соотношении геометрических фигур» (1801), «Геометрия положения» (1803), «Этюд о теории трансверсалей» (1806) Карно выступил как предшественник Ж. Понселе и др. творцов проективной геометрии. Карно принадлежат также труды по прикладной механике («Опыт о машинах вообще», 1783) и фортификации («Об обороне крепостей», т. 1–3, 1810, и др.).

Карно был одним из первых ученых, занимавшихся приложением механики к машинам. В работе «Опыт о машинах вообще», переизданной в 1803 г. под названием «Основные принципы равновесия и движения», Карно предпринял первую попытку создания динамики машин, проанализировал понятие сил инерции, вывел уравнение «живых сил» как основное уравнение движения машин.

В механике Карно занимался, в частности, теорией удара, где до сих пор излагается теорема его имени.

Сын Лазара Карно Сади Никола Леонар Карно (1796 – 1832) является создателем основ термодинамики.

Пуансо Луи
(1777-1859)

ПУАНСО Луи (3.01.1777−5.12.1859) − французский математик и механик Член Парижской АН (1813).Родился в Париже. Окончил Политехническую школу в 1797 г. и был причислен к Корпусу мостов и дорог. Работал профессором математики в лицее Бонапарта, потом экзаменатором в Политехнической школе, а с 1809 − профессор анализа и механики в ней. В 1842 стал сенатором.

Особую роль сыграл в усовершенствовании геометрических методов исследования задач механики.

Первые работы Пуансо. посвящены теории правильных звездчатых многогранников. В 1803 опубликовал "Элементы статики", изложенная наглядным геометрическим методом, в которых применил разработанные им геометрические методы исследования к учению о равновесии твёрдых тел и их систем. В этой работе излагается статика как учение о равновесии твердых тел и их систем на основе закона сложения и разложения сил и пар сил. Теория пар сил представляет собой основной вклад Пуансо в геометрическую статику. Хочется отметить, что статика, которую мы излагаем сегодня студентам, с полным основанием может быть названа статикой Пуансо.

В 1834 построил теорию вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Впервые ввёл понятие эллипсоида вращения (эллипсоида инерции). Особенно удачным было применение геометрического метода к задаче о движении твердого тела около неподвижной точки в том случае, когда момент внешних сил относительно этой точки равен нулю. Эта задача была решена аналитически еще Эйлером, но геометрическая интерпретация, данная Пуансо в его трактате «Новая теория вращения тел» (1834), позволила представить это сложное движение так ясно, что исследование решения в эллиптических функциях стало почти излишним.

Но Пуансо внес существенный вклад и в динамику. Пользуясь геометрическими построениями, он находит все основные свойства механического движения.

Ему принадлежит и ряд других работ, в частности геометрических, которые касаются звездчатых многогранников. Четыре правильных выпуклых многогранника описанные им в 1809, получили название "тела Пуансо".

В заключение отметим весьма интересное суждение Н. Е. Жуковского: «…механика развивалась как глубокомысленными трудами анналистов, так и остроумными исследованиями геометров. При этом часто бывало, что сложные аналитические формулы освещались и представлялись в ясной наглядной форме благодаря удачным геометрическим представлениям. Такие интерпретации захватывали задачу во всей ее полноте и раскрывали многие свойства ее, не замеченные при аналитическом исследовании. Так было с решением задачи о движении твердого тела около центра тяжести: решение сперва было получено Эйлером аналитическим путем, но оставалось затерянным среди масс формул и только благодаря простым и наглядным интерпретациям Пуансо предстало перед глазами ученых со всей ясностью».

Кориолис Гюстав

(1792-1843)

КОРИОЛИС (Coriolis) Гюстав Гаспар (1792-1843) - французский ученый, член Парижской АН (1836). Родился в Париже, в 1810 г. Г. Кориолис окончил

Политехническую школу, а в 1812 г. Школу мостов и дорог. После работы на стройках с 1816 г. начал преподавать в Политехнической школе, где вскоре стал профессором, а в 1831 г. директором учебной части школы. Преподавал также в Центральной школе искусств и ремесел и в Школе мостов и дорог. С 1838 руководил занятиями в Политехнической школе в Париже.

Сыграл большую роль в становлении и Деятельности знаменитой Парижской политехнической школы, из которой вышли и где преподавали многие выдающиеся ученые – механики. Велики заслуги Кориолиса в механике. В трудах «Трактата о механике твердых тел и о расчете действия машин» (1829) и «Об уравнениях относительного движения систем тел» (1835) Кориолис дал окончательное оформление теории относительного движения. Кориолису принадлежит честь открытия знаменитого Кориолисова ускорения и Кориолисовой силы инерции, объясняющих многие, бывшие ранее непонятными, физические явления на Земле, связанные с вращением Земли, как – то: усиленный размыв одного из берегов рек, текущих по меридиану (географический закон Бэра), воздушные и морские течения (муссоны, пассаты и т. д.) и многое другое. В технике Кориолисова сила инерции тоже имела большое значение, так как ее приходится учитывать при расчете движения жидкости во вращающихся каналах (турбинах) и в других случаях.

Теорема о сложении ускорений, носящая имя Кориолиса, впервые была им опубликована в 1835 г. в трудах Политехнической школы.

Работал в основном в области аналитической механики. Дал определение понятия работы и живой силы. По предложению Кориолиса, в Лейбницеву формулу «живой силы» материальной точки был введен множитель ½, и это предложение оказалось весьма удачным.

Представил полное ускорение в виде трех: переносного, относительного и добавочного (кориолисова). Важное значение имели работы Кориолиса, посвященные расчёту действия машин, соударению упругих шаров и др., что позволило применить эти расчеты к теории бильярдной игры. Исследуя работу машин, увязал принцип виртуальных работ с принципом Даламбера. Изучал ползучесть сжатых свинцовых образцов.

Шаль Мишель
(1793-1880)

Шаль, Мишель (Chasles) — французский геометр (1793-1880). По окончании курса лицея, поступил в 1812 г. в парижскую политехническую школу. Уже во время пребывания в политехнической школе он написал несколько самостоятельных работ по геометрии, которые напечатаны были в 1812-1815 гг. во II и III томах издаваемой Гашеттом "Correspondance sur l'Ecole Polytechniqua". По окончании курса политехнической школы Шаль, вполне обеспеченный материально, удалился к своей матери в Шартр и там в течение 10 лет в полном уединении предавался занятиям геометрией.

В 1830 г. Шаль избран в члены-корреспонденты брюссельской академии наук. С 1841 г. профессор Политехнической школы, а с 1846 г. – профессор созданной специально для него кафедры высшей геометрии в Сорбонне. В рядах национальной гвардии дважды защищал Париж (1814, 1870).

Работы Шаля относятся в основном к геометрии. Он в значительной степени подготовил создание кинематической геометрии. В механике Шаль исследовал плоское движение механической системы. Обобщил теорему Коши о перемещении фигуры в плоскости, предложил метод построения мгновенных центров в плоском движении твердого тела. Именно этому вопросу посвящена носящая его имя теорема в кинематике.

Научная деятельность Шаля в области истории математики ознаменовалась неприятным для него эпизодом, получившим чрезвычайно большую огласку. В 1867-69 гг. Шаль представил в парижскую академию наук, с полной уверенностью в подлинности, целое собрание найденных будто бы вновь писем Галилея, Паскаля и Ньютона, потом оказавшихся произведениями одного подделывателя древних письменных памятников.

Главным предметом ученой деятельности Шаля была не история математики, а *высшая геометрия*, называемая также иначе *проективной* или, по исключительно употребляемому в ней методу, *синтетической.* Она же составляла и главный предмет тридцатилетней преподавательской деятельности Шаля, начиная с 1846 г., когда была учреждена в Парижском факультете наук новая кафедра высшей геометрии. Ведя свой курс по этой кафедре, Шаль составил "Traité de géométrie supérieure" (Париж, 1852; 2-ое изд., Париж, 1880). Предметами этой книги были: 1) основные принципы, теория ангармонического отношения, гомографического деления и инволюции; 2) свойства прямолинейных фигур и приложение предыдущих теорий; 3) системы координат, служащих для определения точек или прямых; гомографические фигуры и общий метод деформации фигуры; соотносительные фигуры и общий метод преобразования фигур в другие различного рода и, наконец, 4) круги. Продолжением этого сочинения было "Traité des sections coniques..." (часть 1, Париж, 1865).

В области *прикладной математики* специальным предметом занятий Шаля была *механика.* Его работы по учению о перемещениях фигур и твердых тел положили начало той новой отрасли геометрии, которая известна теперь под именем *кинематической геометрии*, и созданная им же знаменитая *теория характеристик* составляет главнейший отдел *счисляющей геометрии.*

В первом из перечисленных сейчас мемуаров содержится изложение сделанного Шалем распространения предложений, относящихся к притяжению эллипсоидов на случай, когда притягивающее материальное тело имеет какую-нибудь форму. Предложение, выражающее это распространение, имеет большую важность не только для учения о притяжении, но и для теорий теплоты и электричества.

За свои ученые труды вообще и главным образом за первый из перечисленных сейчас мемуаров по учению о притяжении Шаль был избран в члены-корреспонденты парижской академии наук. Его преподавательская деятельность началась с учения о машинах и с геодезии. Шаль преподавал эти предметы в Парижской политехнической школе с 1841 по 1850 г. На склоне лет участвовал в работах по ее преобразованию и усовершенствованию. По *геодезии* и соприкасающимся с этой наукой областям географии и *навигации* учебно-литературные труды Шаля представлены только немногими статьями. Значительную часть материалов для своих ученых и в особенности научно-исторических работ Шаль черпал из собственной, собираемой им в течение всей жизни и очень обширной для частного лица библиотеки, состоявшей из 3936 названий. В 1881 г. ее продали с аукциона.

В действительные члены парижской академии наук по отделению геометрии Шаль был избран только в 1851 г., а в 1861 г. он избран членом-корреспондентом с.-петербургской академии наук, а позднее сделался и ее почетным членом. Кроме того, он был действительным членом лондонского королевского общества и академий брюссельской, берлинской, туринской, неаполитанской, римской des Lincei, болонской и стокгольмской; ломбардского института в Милане и многих др. европейских и американских ученых обществ. Известный французский математик Буке в своей речи, произнесенной над гробом Шаля от лица парижской академии наук, сказал: "Шаль был честью французской математики. Своими геометрическими работами он занял одно из первостепенных мест в среде ученых Европы, а в великих успехах развитии геометрии в наше время на его открытия приходится самая важная доля".

С 1846 г. Шаль становится официально признанным первым геометром Франции и одним из наиболее авторитетных геометров мира.

Остроградский

Михаил Васильевич

(1801-1862)

ОСТРОГРАДСКИЙ Михаил Васильевич (1801-1861/62), российский математик и механик, академик Петербургской АН (1830). Родился в деревне Пашенная (ныне Полтавская область). В 1816 – 1821 гг. учился в Харьковском университете, в 1822 – 1827 гг. прошел математические курсы на Парижском факультете наук и в Коллеж де Франс, где слушал лекции крупнейших математиков и физиков того времени - Ампера, Коши, Лапласа, Пуассона, Фурье, Бине. Уже в 1826 г. Остроградский представил Парижской академии наук свою первую работу «О волнообразном движении жидкости в цилиндрическом сосуде). В 1827 г. он вернулся на родину, где уже знали молодого талантливого ученого. С 1828 г. Остроградский работал в Петербурге: В Морском кадетском корпусе, с 1830 г. – также в институте корпуса инженеров путей сообщений (ныне – ЛИИЖТ), с 1840 г. – также профессор Главного инженерного училища, с 1841 года – также профессором Главного артиллерийского училища.

Остроградский много занимался педагогической деятельностью. В лекциях он знакомил студентов с последними достижениями математической науки.

Остроградский сформулировал общий вариационный принцип для неконсервативных систем. Труды по математическому анализу, математической физике, аналитической и небесной механике, гидромеханике, теории упругости, баллистике, анализу и теории дифференциальных уравнений.

В 1848 году он предложил оригинальный вывод канонических уравнений механики, исследовал интегралы общих уравнений динамики. Автор работы об общей теории удара (1854). Начиная с 30 – х годов он занимался внешней баллистикой, вывел уравнения движения снаряда с учетом сопротивления воздуха. Решил некоторые задачи в теории силового поля.

Независимо от У. Р. Гамильтона открыл и разработал принцип наименьшего действия (известен как принцип Гамильтона – Остроградского), сформулировал в наиболее общем виде принцип возможных перемещений, решил много частных задач в области гидростатики, гидродинамики, теории упругости, теории притяжения.

Ряд работ Остроградского посвящен задачам вариационного исчисления, интегрированию алгебраических функций, теории чисел, алгебре , геометрии, теории вероятностей.

Важные труды Остроградского относятся к вопросам методики преподавания в высшей и средней школах.

В укор Остроградскому необходимо отметить, что он не принял идей неевклидовой геометрии, развитых Н.И. Лобачевским, и резко выступал против них.

Остроградский создал русскую школу прикладной механики. Его учениками были Вышнеградский, Петров, Журавский, Ястржембский, Кербедэ и другие.

ДИРИХЛЕ
Петер Густав Лежен
(13.2.1805-5.5. 1859)

Дирихле Петер Густав Лежен (13.2.1805-5.5. 1859) - немецкий математик. Родился в Дюрене. В 1822-1827гг. был домашним учителем в Париже. Входил в кружок молодых ученых, которые группировались вокруг Ж. Фурье. Учился в университетах Берлина, Парижа, Геттингена. В 1827 занял место доцента в Бреславе; с 1829 работал в Берлине. В 1831-1855гг. - профессор Берлинского университета, после смерти К. Гаусса (1855г.) - Гёттингенского университета.

Исследования Дирихле, ставшие классическими, относятся к теории чисел, математическому анализу, теории уравнений математической физики. Сделал ряд крупных открытий в теории чисел; установил формулы для числа классов бинарных квадратичных форм с заданным определителем и доказал теорему о бесконечности количества простых чисел в арифметической прогрессии из целых чисел, первый член и разность которой взаимно просты. К решению этих задач применил аналитические функции, названные функциями (рядами) Дирихле. Создал общую теорию алгебр, единиц в алгебраическом числовом поле. В области математического анализа впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций, что послужило обоснованием для многих дальнейших исследований.

Значительны труды Дирихле в механике и математической физике, в частности в теории потенциала. В механике Дирихле доказал носящую теперь его имя теорему об устойчивости формы равновесия системы материальных точек.

С именем Дирихле связаны задача, интеграл (ввел интеграл с ядром Дирихле), принцип, характер, ряды. Лекции Дирихле имели огромное влияние на выдающихся математиков более позднего времени, в том числе на Г. Римана, Ф. Эйзенштейна, Л Кронекера, Ю. Дедекинда.

Дирихле с 1837 г. член – корреспондент Петербургской академии наук, с 1854 г. - иностранный член Парижской академии наук.

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

Гамильтон Уильям

(1805–1865)

ГАМИЛЬТОН, УИЛЬЯМ (Hamilton, William) (1805–1865). Выдающийся ирландский математик и механик, член Ирландской академии наук с 1837 г. и ее президент до 1845 г.

Гамильтон родился в Дублине. Научные способности его проявились рано: уже в возрасте 13 лет он достаточно свободно владел 13 языками, а в 16 лет, изучая «Небесную механику» Лапласа, обнаружил в ней ошибку в доказательстве параллелограмма сил.

В 1827 г. окончил Дублинский университет и работал там же профессором. Имел титул королевского астронома Ирландии.

Основные научные труды Гамильтона посвящены математической оптике, механике, вариационному исчислению.

В период с 1830 г. по 1837 г. занимался развитием математической оптики, а затем распространил свои методы на механику. Привел дифференциальные уравнения движения механической системы к каноническому виду (знаменитые канонические уравнения Гамильтона). Около 22 лет своей жизни Гамильтон занимался теорией кватернионов, создав алгоритм полного и систематического геометрического исчисления, нашедший применение в настоящее время в ряде задач прикладной механики, в частности в теории пространственных механизмов.

В 1833 г. Гамильтон установил общий интегральный вариационный принцип классической механики, который затем был обобщен М. В. Остроградским на неконсервативные системы и известен в механике как принцип Гамильтона - Остроградского. Этот принцип является одним из наиболее общих принципов механики, пригодным для решения задач как голономных, так и неголономных механических систем.

С 1837 г. Гамильтон стал членом - корреспондентом Петербургской академии наук, а также был членом других академий наук и научных обществ.

Рэлей Джон Уильям (1842-1919)

РЭЛЕЙ (Рейли) (Rayleigh) Джон Уильям (1842 – 1919), выдающийся английский математик, физик и механик, барон (до получения в 1873 титула после смерти отца — Стретт, Strutt) , один из основоположников теории колебаний, член (1873) и президент (1905-08) Лондонского королевского общества, иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1896). До 1873 г., когда получил титул лорда Рэлея, носил фамилию Стретт.

Рэлей родился в Лангфорд Гро (Эссекс), Учился в Кембриджском университете. В 1879 г., после смерти Дж. Максвелла, замещал его на кафедре физики в Кембридже и стал директором Кавендишской лаборатории в этом университете. С 1887 г. Рэлей становится профессором Британского королевского института.

Его многочисленные научные труды охватывают все естествознание – от математики и механики до химии. Всемирную известность приобрели его работы по гидродинамике, капиллярности, статической механике, электрометрологии, объяснение окраски неба, акустике, молекулярному рассеянию света и др. Открыл (1894, совместно с У. Рамзаем) аргон. Вывел закон излучения Рэлея – Джона.

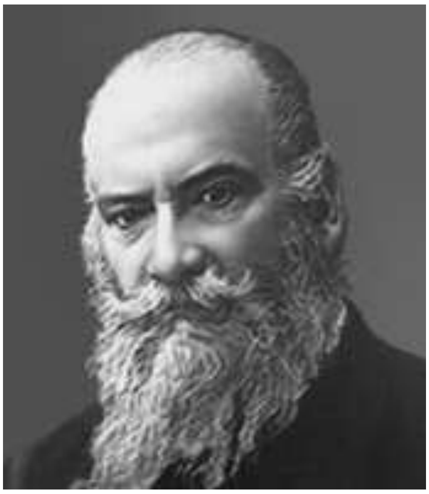
В области механики особенно важным является исследование многочисленных работ по акустике («Трактат о звуке»), где им глубоко разработаны основы теории механических колебаний. С помощью сформулированных им общих теорем Рэлей вывел ряд важных качественных заключений о собственных частотах колебательных систем и разработал методы расчета изменений этих частот при малых отклонениях системы от положения равновесия. При рассмотрении механических систем, совершающих незатухающие колебания (например, струна, возбуждающая смычком) Рэлей первым указал на особый характер этих колебаний, которые ныне называются автоколебаниями Трактат Рэлея «Теория звука» (1877 – 1878) представляет собой фундаментальное изложение общей теории колебаний. Идеи, впервые высказанные Рэлеем в этом трактате, находят широкое применение в теории электрических колебаний, в развитии теории нелинейных колебаний и др., то есть намного обогнали свое время.

В 1904 году был награжден Нобелевской премией.

Жуковский

Николай Егорович

(1847-1921)



ЖУКОВСКИЙ Николай Егорович (1847-1921), российский ученый, основоположник современной аэродинамики, член-корреспондент РАН (1917; член-корреспондент Петербургской АН с 1894). Труды по теории авиации, многие исследования по механике твердого тела, астрономии, математике, гидродинамике и гидравлике, прикладной механике, теории регулирования машин и механизмов и др. Участник создания Аэродинамического института в Кучино, под Москвой (1904), и др. Организатор и первый руководитель (с 1918) Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ).

ЖУКОВСКИЙ Николай Егорович [5 (17) января 1847, село Орехово Владимирской губернии – 17 марта 1921, Москва)], российский ученый в области механики, основоположник современной гидро- и аэродинамики, педагог и популяризатор науки.

Жуковский родился в семье интеллигентного инженера путей сообщения из мелкопоместных дворян Полтавской губернии. Имение в деревне Орехово было приобретено отцом на приданое его жены, матери Жуковского. Всю свою жизнь Жуковский с величайшим удовольствием проводил свой летний отпуск в Орехове.

В 1858 Жуковский поступил в 4-ю московскую мужскую гимназию. С 3-го класса он выделился как лучший ученик по алгебре, геометрии и естественным наукам. Очень трудно давались ему иностранные языки, особенно латынь и немецкий.

В 1864 Жуковский окончил гимназию и в том же году поступил на физико-математический факультет Московского университета, который окончил в 1868 по специальности «прикладная математика». В 1870 стал преподавателем физики во 2-й московской женской гимназии, сменив в этой должности Н. А. Умова, а с 1872 – преподавателем математики Московского технического училища – позднее МВТУ, где проработал до конца жизни (сейчас Московский государственный технический университет им. Н. Ю. Баумана). С 1874 он доцент кафедры аналитической механики. Одновременно в 1872-1920 преподавал механику в московской Практической академии коммерческих наук.

Магистерскую диссертацию Жуковский защитил в 1876. А в 1882 за исследование «О прочности движения» ему была присуждена докторская степень в прикладной математике. В 1885 он был утвержден в должности приват-доцента, а в 1886 в должности экстраординарного профессора кафедры механики Московского университета. С 1887 руководил кафедрой механики МВТУ (с 1879 был сверхштатным профессором). В Московском университете и МВТУ под руководством Жуковского были организованы лаборатории, в которых велись самые разнообразные исследования в области механики.

В 1894 Жуковский был избран членом-корреспондентом Петербургской Академии наук. В 1900 он был выдвинут кандидатом в действительные члены Академии наук, но, не желая оставлять преподавание в Московском университете и МВТУ, снял свою кандидатуру. В 1905 был избран президентом Московского математического общества.

Жуковский с начала 20 в. уделял этим вопросам свое основное внимание. Вместе с ним работала большая группа его учеников, из которых впоследствии выросли крупные специалисты в разных областях авиационной науки и техники. В 1902 под руководством Жуковского при механическом кабинете Московского университета была сооружена одна из первых аэродинамических труб. В 1914 под его же руководством в поселке Кучино под Москвой был построен первый в Европе аэродинамический институт. В том же году Жуковский организовал воздухоплавательную секцию при Московском обществе любителей естествознания, антропологии и этнографии. В 1910 при непосредственном участии Жуковского была открыта аэродинамическая лаборатория в МВТУ.

С 1913 Жуковский преподавал на курсах офицеров-летчиков. В период Первой мировой войны 1914-18 он и его ученики читали лекции по баллистике, воздухоплаванию на курсах летчиков-добровольцев, организованных военным ведомством при МВТУ, вели работу по теории бомбометания. В расчетно-испытательном бюро при этом училище под руководством Жуковского разрабатывались методы аэродинамического расчета самолетных конструкций и расчета на прочность. Все это имело необычайно важное значение для подготовки национальных кадров – конструкторов самолетов и пилотов.

После Октябрьской революции 1917 Жуковский вместе с руководимыми им молодыми учеными активно включился в работу по созданию новой советской авиации. В декабре 1918 правительственным постановлением был учрежден Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), причем его руководителем был назначен Жуковский. Созданные Жуковским теоретические курсы для военных летчиков были реорганизованы в Московский авиационный техникум, на базе которого в 1920 был создан Институт инженеров красного воздушного флота, преобразованный в 1922 в Военно-воздушную инженерную академию им. профессора Н.Е. Жуковского.

В работах Жуковского были развиты все основные идеи, на которых строится современная авиационная наука. В 1890 было опубликовано первое теоретическое исследование Жуковского по авиации – «К теории летания». За ним последовал ряд работ по авиации и динамике полета, из которых особенно важное значение имела работа «О парении птиц» (1891). Работы Жуковского о различных формах траекторий полета стали теоретической базой фигур высшего пилотажа. В своей работе «О присоединенных вихрях», представленной в виде доклада в Московском математическом обществе в 1905, Жуковский вывел формулу для подъемной силы, ставшую основой для всех аэродинамических расчетов самолетов. В период 1912-18 появился ряд работ Жуковского по вихревой теории гребного винта, в которых он, опираясь на разработанную им теорию крыла, дал теорию работы воздушного винта. На основе этой теории проектируются и строятся воздушные винты современных летательных аппаратов.

Основные результаты Жуковского в области теоретической аэродинамики: теорема о подъемной силе; гипотеза Жуковского–Чаплыгина об определении циркуляции; метод округления Жуковского и открытие трех серий теоретических профилей; строгая математическая оценка влияния толщины и изогнутости профиля на величину его подъемной силы; разработка вихревой теории воздушного винта. Эти достижения – фундамент современной аэродинамической науки.

В 1882 и 1886 в связи с выдвинутой тогда технической проблемой создания судов с реактивными движителями Жуковский дал методы расчета воздействия на сосуд втекающей в него и вытекающей из него жидкости. К работам по гидромеханике относится исследование по теории качки морских судов. Важным вопросам гидродинамики была посвящена магистерская диссертация Жуковского «Кинематика жидкого тела» (1876), в которой он предложил геометрическую теорию движения изменяемой системы. Некоторые результаты обширного исследования по гидромеханике «О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные капельной жидкостью» (1885) были позднее использованы при решении космогонических проблем. В 1886 Жуковский создал свой курс «Лекции по гидродинамике», оказавший большое влияние на развитие этой области механики в России.

Характерная для Жуковского практическая направленность научного творчества особенно отчетливо проявилась в его классических исследованиях по гидравлике. Этот цикл был связан с важнейшей технической проблемой водоснабжения крупных городов. Исследования Жуковского по фильтрации впоследствии были с большим успехом применены к вопросам механики добычи нефти. Теоретические и экспериментальные исследования сложного явления гидравлического удара позволили Жуковскому дать законченную теорию гидравлического тарана.

Жуковский выполнил ряд исследований по уравнениям в частных производных и по приближенному интегрированию уравнений. Он первым стал широко применять в гидро- и аэродинамике методы теории функций комплексной переменной. В статьях по теоретической астрономии Жуковский затрагивал теорию кометных хвостов, дал простой способ определения элементов планетных орбит.

Во всех областях своей многогранной деятельности Жуковский пролагал новые пути, постоянно указывая на необходимость сочетания геометрического и аналитического методов исследования явлений природы. При этом характернейшей чертой научного творчества Жуковского являлась практическая направленность теоретических исследований.

Научные заслуги Жуковского нашли высокую оценку в специальном декрете Совета Народных Комиссаров в декабре 1920. Декрет был подписан В. И. Лениным и учреждал «в ознаменование пятидесятилетия профессора Николая Егоровича Жуковского и огромных заслуг его как отца русской авиации,...» годичную премию Николая Егоровича Жуковского за наилучшие труды по математике и механике, а также устанавливал ряд персональных льгот для самого Жуковского.

Ковалевская
Софья Васильевна
(1850-1891)

КОВАЛЕВСКАЯ Софья Васильевна (1850-91), российский математик и механик, первая женщина член-корреспондент Петербургской АН (1889). Сестра А. В. Жаклар, жена В. О. Ковалевского.

Родилась в Москве, в семье генерал - лейтенанта артиллерии Корвин – Круковского. Училась в Гейдельбергском (1869) и Берлинском (1870) университетах. В 1870 – 1874 гг. занималась у известного немецкого математика К. Вейерштрасса. В 1874 г., по ходатайству Вейерштрасса Геттингенский университет присудил ей степень доктора философии заочно за три ее работы, относившиеся к теории дифференциальных уравнений в частных производных, к вопросу о форме кольца Сатурна и некоторых специальных типов Абелевых интегралов. Ковалевская становится профессором Стокгольмского университета и проработала там 8 лет, прочтя за это время 12 курсов по различным разделам математики.

В период работы в Стокгольмском университете, куда она вынуждена была уехать из – за того, что на родине в то время не нашлось места высокообразованной женщине, Ковалевская написала свою знаменитую работу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, за которую в 1888 г. Парижская академия наук присудила ей премию. Этой своей работой она продвинула вперед решение задачи, начатое Эйлером и Лагранжем.

Научные работы Ковалевской относятся также к вопросу о преломлении света и его распространении в кристаллической среде, а также к теории потенциала.

Основные труды по математическому анализу (дифференциальные уравнения и аналитические функции), механике (вращение твердого тела вокруг неподвижной точки) и астрономии (форма колец Сатурна).

Необходимо отметить, что Ковалевская занималась общественно - политической деятельностью. Она сочувствовала революционной борьбе и идеям утопического социализма. В 1871 г. вместе с мужем В.О.Ковалевским – известным ученым – палеонтологом – приехала в осажденный Париж, ухаживала за ранеными коммунарами.

Одновременно с научной деятельностью Ковалевская обнаружила весьма неординарное литературное дарование, написав несколько художественных произведений: повесть «Нигилистка», опубликованная в 1892 году; «Воспоминание детства» (1889) , полный текст - 1893 г. и др.

__Аппель Поль-Эмиль__

__(1857-1935)__

Аппель Поль-Эмиль (Paul-Emile Appell) — французский математик и механик, с 1892 г. – член Парижской академии наук, автор лучшего современного курса теоретической механики: "Mécanique rationnelle" (в трех томах; т. I, 1885, т. II, 1897, т. III, 1901), род. в 1855 г., в Страсбурге. 1873 г. поступил в Нормальную высшую школу; в 1876 г. получил степень доктора математических наук, защитив диссертацию: "Sur les propriétés des coubiques gauches et le mouvement hélicoпdal d un corps solide". С 1885 г. получил кафедру профессора рациональной механики a la Faculté des sciences de Paris (на Парижском факультете наук).

Из ряда многочисленных написанных им сочинений и мемуаров, мемуар: "Sur les intégrales des fonctions a multiplicateur et leurs applications au développement des fonctions abèliennes en series trigonometriques", написанный в 1889 г., по представлению Вейерштрасса был увенчан премией короля Швеции Оскара II.

Основные исследования Аппеля относятся к теории аналитических функций и механике. Занимался Аппель также теорией алгебраических функций и теорией потенциала. Ввел полиномы, названные его именем (полиномы Аппеля). Вывел обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие движение как голономных, так и неголономных механических систем; это – наиболее общие уравнения движения механических систем, получившие название уравнений Аппеля. Ему принадлежит ряд важных работ в области неголономной механики, получивших в настоящее время большое применение. Аппель рассмотрел многие особенности движения материальной точки под действием центральной силы, указал метод решения проблемы Эйлера при помощи канонических уравнений Гамильтона, исследовал сложные конечные колебания под действием сил тяжести на гладкой сфере.

В 1893 – 1896 годах издан капитальный пятитомный труд Аппеля по теоретической механике, над которым он работал несколько десятков лет. Это сочинение Аппеля не утратило своего значения и сегодня.

Циолковский
Константин Эдуардович
(1857-1935)

ЦИОЛКОВСКИЙ Константин Эдуардович (1857-1935), российский ученый и изобретатель, основоположник современной космонавтики родился в селе Ижевском Рязанской губернии, в семье лесничего. В детстве почти полностью потерял слух и с 14 лет учился самостоятельно. Начиная с 16 – летнего возраста, он отдавал все свое время, все свои мысли одной идее – покорению людьми космических пространств.

В 1879 экстерном сдал экзамен на звание учителя, всю жизнь преподавал физику и математику (с 1892 в Калуге).

В конце 19 и начале 20века началась интенсивная разработка нового раздела теоретической механики, посвященная движению тел переменной массы. Основные результаты в этом направлении получены русскими учеными - И.В. Мещерским и К.Э. Циолковским.

Развитие механики тел переменной массы привело к созданию ракетной техники – великого достижения мировой науки. Движение тел переменной массы в сочетании с исследованием прямолинейного движения ракет привело к возникновению и бурному развитию новой науки - ракетодинамики.

Жизнь Циолковского - героическая жизнь исследователя. Его научные искания были самобытны и многогранны. Он сделал ряд выдающихся открытий в экспериментальной аэродинамики, теории авиации, ракетодинамики, теории межпланетных путешествий, геофизике, биологии.

Впервые обосновал возможность использования ракет для межпланетных сообщений, указал рациональные пути развития космонавтики и ракетостроения, нашел ряд важных инженерных решений конструкции ракет и жидкостного ракетного двигателя. Технические идеи Циолковского находят применение при создании ракетно-космической техники.

В философско-художественном эссе Циолковский развивал «космическую философию», которая опирается на идею «атома» – бессмертного одушевленного элементарного существа, курсирующего от организма к организму во Вселенной. Космическая утопия Циолковского предполагает расселение человечества в Солнечной системе и др. звездных мирах, а в будущем – полную биохимическую перестройку обитателей Земли и превращение их в разумные «животно-растения», непосредственно перерабатывающие солнечную энергию.

Циолковский первым разработал строгую математическую теорию движения двухступенчатой ракеты в 1926 г. Подобную законченную теорию многоступенчатых ракет («ракетных поездов») он опубликовал в 1929 г. Эта теория стала той научной базой, на которой создавались первые межконтинентальные баллистические ракеты, первые искусственные спутники Земли и первые пилотируемые космические корабли.

Однако этот великий человек, гордость отечественной науки, до 60 – летнего возраста оставался малоизвестным «оригиналом», «дилетантом - самоучкой» даже в родной стране. Всю свою жизнь, начиная с 1880 г. он работал в средней школе учителем математики и физики, чтобы иметь средства к существованию. Научные статьи Циолковского начали появляться в печати с 1891 г. мизерными тиражами в виде небольших брошюр на средства самого автора. Работы Циолковского по ракетной технике начали переводится на иностранные языки только в 1925 году, и только тогда его имя становится известным в Западной Европе и Америке.

В летописях истории науки, пожалуй, мало найдется людей с таким широким пониманием явлений природы и технического прогресса, с таким проницательным умом, с такой горячей верой в могущество науки, с такой высокой научной продуктивностью. У Циолковского преобладал творческий элемент саморазвития. Он всю свою жизнь учился мыслить, преодолевать трудности, решать вопросы и задачи, не имея подчас нужных книг и учителей.

Его главные научные труды того времени были связаны стремя фундаментальными научно – техническими проблемами: цельнометаллический дирижабль, аэроплан и ракета для межпланетных путешествий.

Необходимо отметить, что большинство открытий и результатов Циолковского не были опубликованы в царской России и были получены повторно в 20 веке другими учеными.

После Октябрьской революции условия жизни и деятельности Циолковского существенно улучшились. В 1919 г. он был избран членом

Социалистической академии и постановлением Совнаркома ему была назначена персональная пенсия.

Циолковский скончался в Калуге 19 сентября 1935 года.

Ляпунов

Александр Михайлович

(1857-1918)

Русский математик и механик, профессор (1892), академик Петербургской Академии Наук (1901), выдающийся представитель петербургской математической школы, созданной П.Л.Чебышевым. Член Петербургского, Харьковского и Казанского университетов, иностранный член Академии деи Линчеи, член-корреспондент Парижской Академии Наук, иностранный член математического кружка в Палермо, почетный член Харьковского математического общества и других научных обществ. Родился в Ярославле. В 1876 году поступил на естественное отделение физико-математического факультета Петербургского университета, где в это время работали Д.И.Менделеев, П.Л.Чебышев, Д.К. Бобылев, А.Н. Коркин, Е.И.Золотарев и другие выдающиеся представители науки и культуры. Лекции П.Л.Чебышева произвели на Ляпунова такое впечатление, что через месяц он перешел с естественного отделения на математическое.

На 4-м курсе университета он был награжден золотой медалью за развитие предложенной факультетом темы "О равновесии тяжелых тел в тяжелых жидкостях". В 1880 блестяще окончил университет и был оставлен при нем для подготовки к профессорскому званию на кафедре механики. Научная деятельность Ляпунова была разнообразной. Он является творцом теории устойчивости движения и автором фундаментальных исследований о фигурах равновесия вращающейся жидкости. Важен вклад Ляпунова в теорию вероятностей, а его исследования по теории потенциала открыли новые пути для развития методов математической физики. Успешно защитив диссертацию на степень магистра прикладной математики на тему "Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости", Ляпунов перешел в Харьковский университет.

В 1888-1892 опубликовал ряд статей, посвященных решению задачи об устойчивости движения материальных систем, которая сводится к исследованию систем дифференциальных уравнений. Проблема устойчивости движения принадлежит к категории труднейших задач естествознания. Её исследовали многие выдающиеся математики от Ж. Лагранжа до А. Пуанкаре. В работе "Общая задача об устойчивости движения" (1892) Ляпунов предложил новые общие строгие методы решения задач об устойчивости движения. Один из этих методов, основывающийся на понятии так называемой функции Ляпунова, позволил ему получить важные по своим применениям критерии устойчивости решения. Созданные Ляпуновым методы исследования успешно применяют и в других разделах теории дифференциальных уравнений. Большой вклад внесли работы Ляпунова и в математическую физику, в частности в теорию потенциала.

В 1902 году ученый переезжает в Петербург и полностью отдается научной работе. Первая работа петербургского периода деятельности Ляпунова была посвящена лапласовской и лежандровской гидростатической теории фигур планет.

В 1905 году он снова начинает заниматься проблемами фигур равновесия однородной жидкости, которые образуются под влиянием равномерного вращения её вокруг некоторой неизменной оси. В частности, Ляпунов доказал неустойчивость так называемых грушевидных фигур и тем самым опроверг противоположное ошибочное утверждение английского астронома Дж.Дарвина. Ляпунов сделал важный вклад в теорию вероятностей, дав простое и строгое доказательство центральной предельной теоремы в более общей форме, чем та, в которой она рассматривалась до него П.Л. Чебышевым и А.А. Марковым.

$$R_e = \frac{\rho \cdot \nu \cdot \iota}{\mu}$$

Мещерский

Иван Всеволодович

(1859-1935)

МЕЩЕРСКИЙ Иван Всеволодович(1859-1935), российский ученый родился в Архангельске.

В 1879 г. поступил на физико-математический факультет Петербургского университета и окончил его в 1882 г. Мещерский был оставлен на кафедре известного русского механика Бобылева для подготовки к научной деятельности. В 1893 году Мещерский доложил математическому обществу первые результаты своих исследований в области движения материальной точки переменной массы. В 1897 году защитил магистерскую диссертацию на тему «Динамика точки переменной массы», в которой получено основное уравнение движения точки при любом законе изменения её массы и при любой относительной скорости отбрасываемых или присоединяемых частиц. Один частный случай движения точки переменной массы, вытекающий из общего уравнения Мещерского, был спустя более 30 лет заново «открыт» итальянским ученым Леви – Чивита.

С 1902 г. Мещерский – профессор кафедры теоретической механики Петербургского политехнического института, в стенах которого протекала в дальнейшем научная и педагогическая деятельность Мещерского.

В 1904 г. вышла в свет вторая фундаментальная работа Мещерского «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае», где учитывается возможность одновременного присоединения и отделения частиц.

Работы Мещерского, посвященные движению точки переменной массы, имели в виду главным образом астрономические приложения.

Законы изменения массы, которые Мещерский ввел при исследовании задач небесной механики, известны в астрономии как «Законы Мещерского».

Работы Мещерского являются научной основой для изучения движения ракет, реактивных самолетов, комет и других тел переменной массы.

Как ученый Мещерский намного обогнал свое время, и это явилось трагедией ученого в условиях дореволюционной России. Научное предвидение Мещерского характеризует его как талантливого, проницательного механика.

Предвидеть будущее развитие науки на десятилетие вперед, даже в какой – нибудь узкой области, дано немногим. И в этом судьба Мещерского очень сходна с судьбой Циолковского. Более того, приоритет Мещерского в области механики тел переменной массы далеко не всеми признается за рубежом, хотя факты явно говорят о несправедливости такого положения вещей. Действительно, свое знаменитое уравнение Мещерский получил в 1897 г., и лишь спустя 31 год итальянский математик Леви – Чивита еще раз вывел это уравнение, которое в иностранной литературе получило название «уравнение Леви – Чивита».

И вероятно именно поэтому до 40 – х годов 20 века Мещерский был известен широким кругам русской научно технической интеллигенции как высококвалифицированный педагог высшей школы, но не как выдающийся ученый – новатор. И именно в этом была глубокая трагедия Мещерского.

И наконец отметим, что в Петербургском университете под руководством Мещерского был создан непревзойденный до сих пор задачник по теоретической механике, выдержавший 36 изданий (к 1988 г.), переведенный на несколько иностранных языков и принятой в качестве основного учебного пособия по теоретической механике во многих зарубежных университетах.

Крылов

Алексей Николаевич

(1868-1945)

КРЫЛОВ Алексей Николаевич (1863-1945), российский кораблестроитель, механик и математик, академик АН СССР (1925; академик Петербургской АН с 1916, академик РАН с 1917), Герой Социалистического Труда (1943). Участник проектирования и постройки первых русских линкоров. Труды по теории корабля, магнитных и гироскопических компасов, артиллерии, механике, математике, истории науки. Создал ряд корабельных и артиллерийских приборов. Государственная премия СССР (1941).

Крылов родился в селе Висяги Симбирской губернии, в семье помещика. В 1878 г. поступил в Петербургское морское училище и окончил его в 1884 г. с отличием. В 1888 г. Крылов поступил в Морскую академию и в 1890 г. окончил её первым, с занесением фамилии на мраморную доску академии. С 1890 г. работал в той же академии, с 1892 г. читал лекции по теории корабля, профессор Петербургского политехнического института и Института инженеров путей сообщений. С 1900 г. Крылов заведует опытным бассейном Морского ведомства, а в 1908 – 1910 гг. – главный инспектор кораблестроения и председатель Морского технического комитета. В 1917 г. Крылов назначается директором Главной физической лаборатории Академии наук. В советское время Крылов, принявший Октябрьскую революции, занимал следующие посты: в 1919 – 1921 гг. – начальник морской Академии, с 1927 г., по возвращении из шестилетней заграничной командировки, - профессор Морской академии, в 1927 – 1934 годах директор физико-математического института АН СССР.

Основные исследования Крылова относятся к теории корабля, строительной механики, теории гироскопа, теории дифференциальных уравнений и истории науки.

Крылов был крупнейшим знатоком прикладной математики, приобретя мировую известность за её применение в области кораблестроения, механики корабля и теории вибрации судов. Им была развита теория непотопляемости корабля, теория успокоения качки. Его исследования в теории колебаний корабля при волнении (1896 – 1898) служат основой при изучении прочности и мореходности корабля.

В области баллистики исследовал продольные и поперечные колебания стволов орудий при стрельбе и вращательное движение снаряда.

В строительной механике обосновал и развил оригинальный метод расчета балок на упругом основании.

Математические исследования Крылова посвящены математической физике и теории приближенных вычислений. В 1917 г. издал капитальный труд «Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений», не утративших своего значения и в наши дни.

Крылов выполнил важные исследования в области истории научной техники, в частности впервые перевел на русский язык в 1915 году «Математические начала натуральной философии» Ньютона и «Теорию движения Луны» Эйлера.

В 1943 г. им написано методическое руководство «Мысли и материалы о преподавании механики».

В 1943 г. Крылов был удостоен звания Героя Социалистического труда.

Чаплыгин

Сергей Алексеевич

(1869-1942)

ЧАПЛЫГИН Сергей Алексеевич (1869-1942), российский ученый, один из основоположников аэродинамики, академик АН СССР (1929), Герой Социалистического Труда (1941). Труды по теоретической механике, гидро-, аэро- и газовой динамике. Совместно с Н. Е. Жуковским участвовал в организации Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ, 1918, в 1921-41 научный руководитель), с 1929 года академик.

Чаплыгин родился в г. Раненбурге (ныне г. Чаплыгин Липецкой области). В 1886 г. окончил гимназию в Воронеже, затем учился в Московском университете, который окончил в 1890 г. с дипломом 1 – й степени. Затем он был оставлен Жуковским на кафедре прикладной математики для подготовки к профессорскому званию. В 1893 г. Чаплыгин написал свою первую научную работу, посвященную изучению движения твердого тела в жидкости. В том же году сдал магистерские экзамены и начал вести активную педагогическую работу в вузах Москвы. В 1898 году Чаплыгин защитил диссертацию на степень магистра прикладной математики. За работы в области движения твердого тела в жидкости Академия наук наградила Чаплыгина большой золотой медалью.

Большой заслугой Чаплыгина является обобщение в 1897 г. уравнений Лагранжа 2-го рода на неголономные системы.

Чаплыгин исследовал две известные классические задачи; о движении тела при наличии неинтегрируемых связей и о движении тела с одной неподвижной точкой.

В 1903 г. Чаплыгин закончил большую работу «О газовых струях» и представил её в качестве докторской диссертации. В этой работе исследовались вопросы движения воздушных струй при больших скоростях, при которых уже нельзя считать воздух несжимаемым и необходимо учитывать эффект сжатия.

Работа намного обогнала свое время, и через 30 лет после её опубликования выяснилось, что она является очень важной для аэродинамических расчетов, связанных с движением самолетов со сверхзвуковыми скоростями.

В дальнейшем Чаплыгин решил ряд важных проблем авиации и аэродинамики: определил точки приложения подъемной силы и силы при неустановившемся полете, развил теорию устойчивости крыла при полете

Несомненные заслуги Чаплыгина в области математики. Так, в теории дифференциальных уравнений он поставил и решил некоторые граничные задачи, предложил метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. В 1919 г. доказал теорему о неравенствах, носящую его имя.

Чаплыгин удостоен в 1941 г. звания Героя Социалистического Труда.

В 1942 г. Академия наук СССР учредила премию имени Чаплыгина «За лучшую оригинальную работу в области механики».

Леви-Чивита Туллио

(1873—1942)

Леви-Чивита (Levi-Civita) Туллио (29.3.1873, Падуя, — 29.12.1941, Рим), итальянский математик и механик. Профессор университетов в Падуе (1898—1918) и Риме (1918—38). Привёл в систему тензорный анализ (1901; вместе с итальянским математиком Г. Риччи-Курбастро). Впервые поставил и решил вопрос о «регуляризации» ограниченной проблемы трёх тел. Автор ряда работ по небесной механике, гидродинамике, теории дифференциальных уравнений. Математически обосновал теорию адиабатических инвариантов, введённых А. Эйнштейном.

Родился в Падуе. В 1894 году окончил Падуанский университет. В 1898 – 1919 гг. – профессор рациональной механики Падуанского университета, в 1918 – 1938 гг. – профессор Римского университета.

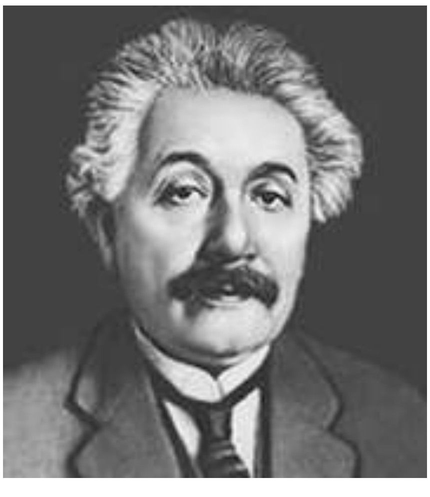
Основное направление исследований - теория чисел, математический анализ, дифференциальная геометрия, аналитическая и небесная механика, гидродинамика, теория упругости.

Леви – Чивита разработал анализ, предложил особый метод решения задач трех тел, опубликовал ряд работ по релятивистской механике и механике неголономных систем. В соавторстве с известным итальянским профессором технической механики У. Амальди Леви – Чивита написал работу по теоретической механике, отличавшуюся ясностью изложения и широтой охвата всех разделов курса. На русском языке эта работа издана в двух томах, каждый том в двух книгах. В конце каждой главы, интересные по своему как математическому, так и физическому содержанию. Книга снабжена также большим количеством кратких биографических справок о крупнейших математиках и механиках.

Леви – Чивита является членом - корреспондентом Петербургской академии наук (с 1904 г.), почетным членом АН СССР (с 1934 г.), членом Парижской академии наук (с 1911 г.), Лондонского Королевского общества (с 1930), членом многих научных обществ.

Характеристика планет солнечной системы

Название планеты	Масса	Средний диаметр	Большая полуось орбиты	Время обращения	Период вращения	Средняя плотность (г/см^3)
Меркурий	0,056	0,332	0,387	0,241	58,6d	5,14
Венера	08136	0,97	0,723	0,615	243d	5,22
Земля	1	1	1	1	23h56m4.1s	5,52
Марс	0,0108	0,530	1,524	1,881	24h37m	3,95
Юпитер	317,8	11,19	5,203	11,862	9h50m-5h56m	1,33
Сатурн	95,1	9,1	9,539	29,457	10h14m-10h40m	0,68
Уран	14,52	3,75	19,18	84,015	10h49m	1,48
Нептун	17,24	3,50	30,06	164,782	15h40m	2,27
Плутон	0,1	0,5	39,75	250,6	6d4	10,4



Эйнштейн Альберт
(1879-1955)

ЭЙНШТЕЙН (Einstein) Альберт (1879-1955), физик-теоретик, один из основателей современной физики, иностранный член-корреспондент РАН (1922) и иностранный почетный член АН СССР (1926). Родился в Германии, с 1893 жил в Швейцарии, с 1914 в Германии, в 1933 эмигрировал в США. Создал частную (1905) и общую (1907-16) теории относительности. Автор основополагающих трудов по квантовой теории света: ввел понятие фотона (1905), установил законы фотоэффекта, основной закон фотохимии (закон Эйнштейна), предсказал (1917) индуцированное излучение. Развил статистическую теорию броуновского движения, заложив основы теории флуктуаций, создал квантовую статистику Бозе – Эйнштейна. С 1933 работал над проблемами космологии и единой теории поля. В 30-е гг. выступал против фашизма, войны, в 40-е – против применения ядерного оружия. В 1940 подписал письмо президенту США, об опасности создания ядерного оружия в Германии, которое стимулировало американские ядерные исследования. Один из инициаторов создания государства Израиль. Нобелевская премия (1921, за труды по теоретической физике, особенно за открытие законов фотоэффекта).

Альберт Эйнштейн родился в старинном немецком городе Ульме, но через год семья переселилась в Мюнхен, где отец Альберта, Герман Эйнштейн, и дядя Якоб организовали небольшую компанию «Электротехническая фабрика Я. Эйнштейна и К°». Вначале дела компании, занимавшейся усовершенствованием приборов дугового освещения, электроизмерительной аппаратурой и генераторами постоянного тока, шли довольно успешно. Но в 90-х гг. 19 в., в связи с расширением строительства крупных электроцентралей и линий дальних электропередач, возник целый ряд мощных электротехнических фирм. Надеясь спасти компанию, братья Эйнштейны в 1894 перебрались в Милан, однако через два года, не выдержав конкуренции, компания прекратила свое существование.

Дядя Якоб уделял много времени маленькому племяннику. «Я помню, например, что теорема Пифагора была мне показана моим дядей еще до того, как в мои руки попала священная книжечка по геометрии», – так Эйнштейн в воспоминаниях, относящихся к 1945, говорил об учебнике евклидовой геометрии. Часто дядя задавал мальчику математические задачи, и тот «испытывал подлинное счастье, когда справлялся с ними».

Родители отдали Альберта сначала в католическую начальную школу, а затем в мюнхенскую классическую гимназию Луитпольда, известную как прогрессивное и весьма либеральное учебное заведение, но которую он так и не окончил, переехав вслед за семьей в Милан. И в школе, и в гимназии Альберт приобрел не лучшую репутацию. Чтение научно-популярных книг породило у юного Эйнштейна, по его собственному выражению, «прямо-таки фантастическое свободомыслие». В своих воспоминаниях М. Борн писал: «Уже в ранние годы Эйнштейн показал неукротимую волю к независимости. Он ненавидел игру в солдаты, потому что это означало насилие». Позже Эйнштейн говорил, что людям, которым доставляет удовольствие маршировать под звуки марша, головной мозг достался зря, они вполне могли бы довольствоваться одним спинным.

В октябре 1895 шестнадцатилетний Эйнштейн пешком отправился из Милана в Цюрих, чтобы поступить в Федеральную высшую техническую школу – знаменитый Политехникум, для поступления в который не требовалось свидетельства об окончании средней школы. Блестяще сдав вступительные экзамены по математике, физике и химии, он, однако, с треском провалился по другим предметам. Ректор Политехникума, оценив незаурядные математические способности Эйнштейна, направил его для подготовки в кантональную школу в Аарау (в 20 милях к западу от Цюриха), которая в то время считалась одной из лучших в Щвейцарии. Год, проведенный в этой школе, которой руководил серьезный ученый и прекрасный педагог А. Таухшмид, оказался и очень полезным, и – по контрасту с казарменной обстановкой в Пруссии – приятным.

Выпускные экзамены в Аарау Эйнштейн сдал вполне успешно (кроме экзамена по французскому языку), что дало ему право на зачисление в Политехникум в Цюрихе. Кафедру физики там возглавлял профессор В. Г. Вебер, прекрасный лектор и талантливый экспериментатор, занимавшийся в основном вопросами электротехники. Поначалу он очень хорошо принял Эйнштейна, но в дальнейшем отношения между ними осложнились настолько, что после окончания учебы Эйнштейн некоторое время не мог устроиться на работу. В какой-то мере это объяснялось чисто научными причинами. Отличаясь консерватизмом взглядов на электромагнитные явления, Вебер не принимал теории Максвелла, представлений о поле и придерживался концепции дальнодействия. Его студенты узнавали прошлое физики, но не ее настоящее и, тем более, будущее. Эйнштейн же изучал труды Максвелла, был убежден в существовании всепроникающего эфира и размышлял о том, как на него действуют различные поля (в частности, магнитное) и как можно экспериментально обнаружить движение относительно эфира. Он тогда не знал об опытах Майкельсона и независимо от него предложил свою интерференционную методику.

Но опыты, придуманные Эйнштейном, со страстью работавшим в физическом практикуме, не имели шансов осуществиться. Преподаватели недолюбливали строптивого студента. «Вы умный малый, Эйнштейн, очень умный малый, но у вас есть большой недостаток – вы не терпите замечаний», – сказал ему как-то Вебер, и этим определялось многое.

После окончания Политехникума (1900) молодой дипломированный преподаватель физики (Эйнштейну шел тогда двадцать второй год) жил в основном у родителей в Милане и два года не мог найти постоянной работы. Только в 1902 он получил наконец, по рекомендации друзей, место эксперта в федеральном Бюро патентов в Берне. Незадолго до этого Эйнштейн сменил гражданство и стал щвейцарским подданным. Через несколько месяцев после устройства на работу он женился на своей бывшей цюрихской однокурснице Милеве Марич, родом из Сербии, которая была на четыре года старше его. В Бюро патентов, которое Эйнштейн называл «светским монастырем», он проработал семь с лишним лет, считая эти годы самыми счастливыми в жизни. Должность «патентного служки» постоянно занимала его ум различными научными и техническими вопросами, но оставляла достаточно времени для самостоятельной творческой работы. Ее результаты к середине «счастливых бернских лет» составили содержание научных статей, которые изменили облик современной физики, принесли Эйнштейну мировую славу.

Первая из этих статей – «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, вытекающем из молекулярно-кинетической теории», вышедшая в 1905, – была посвящена теории броуновского движения. Это явление (непрерывное беспорядочное зигзагообразное движение частичек цветочной пыльцы в жидкости), открытое в 1827 английским ботаником Р. Броуном, уже получило тогда статистическое объяснение, но теория Эйнштейна (который не знал предшествующих работ по броуновскому движению) имела законченную форму и открывала возможности количественных экспериментальных исследований. В 1908 эксперименты Ж. Б. Перрена полностью подтвердили теорию Эйнштейна, что сыграло важную роль для окончательного становления молекулярно-кинетических представлений.

В том же 1905 вышла и другая работа Эйнштейна – «Об одной эвристической точке зрения на возникновение и превращение света». За пять лет до этого М. Планк показал, что спектральный состав излучения, испускаемого горячими телами, находит объяснение, если принять, что процесс излучения дискретен, то есть свет испускается не непрерывно, а дискретными порциями определенной энергии. Эйнштейн выдвинул предположение, что и поглощение света происходит теми же порциями и что вообще «однородный свет состоит из зерен энергии (световых квантов),... несущихся в пустом пространстве со скоростью света». Эта революционная идея позволила Эйнштейну объяснить законы фотоэффекта, в частности, факт существования «красной границы», то есть той минимальной частоты, ниже которой выбивания светом электронов из вещества вообще не происходит.

Идея квантов была применена Эйнштейном и к объяснению других явлений, например, флуоресценции, фотоионизации, загадочных вариаций удельной теплоемкости твердых тел, которые не могла описать классическая теория.

Работы Эйнштейна, посвященные квантовой теории света, были удостоены в 1921 Нобелевской премии.

Наибольшую известность Эйнштейну все же принесла теория относительности, изложенная им впервые в 1905, в статье «К электродинамике движущихся тел». Уже в юности Эйнштейн пытался понять, что увидел бы наблюдатель, если бы бросился со скоростью света вдогонку за световой волной. Теперь Эйнштейн решительно отверг концепцию эфира, что позволило рассматривать принцип равноправия всех инерциальных систем отсчета как универсальный, а не только ограниченный рамками механики. Эйнштейн выдвинул удивительный и на первый взгляд парадоксальный постулат, что скорость света для всех наблюдателей, как бы они ни двигались, одинакова. Этот постулат (при выполнении некоторых дополнительных условий) приводит к полученным ранее Х. Лоренцем формулам для преобразований координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, движущуюся относительно первой. Но Лоренц рассматривал эти преобразования как вспомогательные, или фиктивные, не имеющие непосредственного отношения к реальному пространству и времени. Эйнштейн понял реальность этих преобразований, в частности, реальность относительности одновременности. Таким образом, принцип относительности, установленный для механики еще Галилеем, был распространен на электродинамику и другие области физики. Это привело, в частности, к установлению важного универсального соотношения между массой М, энергией Е и импульсом Р: Е2= М2 с4 + Р2 с2 (где с — скорость света), которое можно назвать одной из теоретических предпосылок использования внутриядерной энергии.

Профессорская деятельность. Приглашение в Берлин. Общая теория относительности.

В 1905 Эйнштейну было 26 лет, но его имя уже приобрело широкую известность. В 1909 он избран профессором Цюрихского университета, а через два года – Немецкого университета в Праге. В 1912 Эйнштейн возвратился в Цюрих, где занял кафедру в Политехникуме, но уже в 1914 принял приглашение переехать на работу в Берлин в качестве профессора Берлинского университета и одновременно директора Института физики. Германское подданство Эйнштейна было восстановлено. К этому времени уже полным ходом шла работа над общей теорией относительности. В результате совместных усилий Эйнштейна и его бывшего студенческого товарища М. Гроссмана в 1912 появилась статья «Набросок обобщенной теории относительности», а окончательная формулировка теории датируется 1915. Эта теория, по мнению многих ученых, явилась самым значительным и самым красивым теоретическим построением за всю историю физики. Опираясь на всем известный факт, что «тяжелая» и «инертная» массы равны, удалось найти принципиально новый подход к решению проблемы, поставленной еще И. Ньютоном: каков механизм передачи гравитационного взаимодействия между телами и что является переносчиком этого взаимодействия. Ответ, предложенный Эйнштейном, был ошеломляюще неожиданным: в роли такого посредника выступала сама «геометрия» пространства – времени. Любое массивное тело, по Эйнштейну, вызывает вокруг себя «искривление» пространства, то есть делает его геометрические свойства иными, чем в геометрии Евклида, и любое другое тело, движущееся в таком «искривленном» пространстве, испытывает воздействие первого тела.

Общая теория относительности привела к предсказанию эффектов, которые вскоре получили экспериментальное подтверждение. Она позволила также сформулировать принципиально новые модели, относящиеся ко всей

Вселенной, в том числе и модели нестационарной (расширяющейся) Вселенной.

Не без колебаний принял Эйнштейн предложение переехать в Берлин. Но возможность общения с крупнейшими немецкими учеными, в числе которых был и Планк, привлекала его.

Политическая и нравственная атмосфера в Германии делалась все тягостнее, антисемитизм поднимал голову, и когда власть захватили фашисты, Эйнштейн в 1933 навсегда покинул Германию. Впоследствии в знак протеста против фашизма он отказался от германского подданства и вышел из состава Прусской и Баварской Академий наук. В берлинский период, кроме общей теории относительности, Эйнштейном была разработана статистика частиц целого спина, введено понятие вынужденного излучения, играющего важную роль в лазерной физике, предсказано (совместно с де Гаазом) явление возникновения вращательного импульса тел при их намагничивании и др. Однако, будучи одним из создателей квантовой теории, Эйнштейн не принял вероятностной интерпретации квантовой механики, полагая, что фундаментальная физическая теория не может быть статистической по своему характеру. Он нередко повторял, что «Бог не играет в кости» со Вселенной.

Переехав в США, Эйнштейн занял должность профессора физики в новом институте фундаментальных исследований в Принстоне (штат Нью-Джерси). Он продолжал заниматься вопросами космологии, а также усиленно искал пути построения единой теории поля, которая бы объединила гравитацию, электромагнетизм (а возможно, и остальное). И хотя реализовать эту программу ему не удалось, это не поколебало репутации Эйнштейна как одного из величайших естествоиспытателей всех времен.

В Принстоне Эйнштейн стал местной достопримечательностью. Его знали как физика с мировым именем, но для всех он был скромным, приветливым и несколько эксцентричным человеком, с которым можно было столкнуться прямо на улице. В часы досуга он любил музицировать. Начав учиться игре на скрипке в шесть лет, Эйнштейн продолжал играть всю жизнь, иногда в ансамбле с другими физиками. Ему нравился парусный спорт, который, как он полагал, необыкновенно способствует размышлениям над физическими проблемами. Среди многочисленных почестей, оказанных Эйнштейну, было предложение стать президентом Израиля, последовавшее в 1952, которое он не принял. Будучи последовательным сторонником сионизма, Эйнштейн приложил немало усилий к созданию Еврейского университета в Иерусалиме в 1925.В умах многих людей имя Эйнштейна связано с атомной проблемой. Действительно, понимая, какой трагедией для человечества могло бы оказаться создание в фашистской Германии атомной бомбы, он в 1939 направил президенту США письмо, послужившее толчком для работ в этом направлении в Америке. Но уже в конце войны его отчаянные попытки удержать политиков и генералов от преступных и безумных действий оказались тщетными. Это было самой большой трагедией его жизни.

Эйнштейн скончался в Принстоне от аневризмы аорты.

Крыло́в
Николай Митрофанович
(1879 -1955)

Крыло́в Николай Митрофанович, род. 29.11.1879, С.-Петербург - ум. 11.5.1955, Москва.

Математик. Академик АН УССР (1922), член-корреспондент по разряду математических наук (математика) Отделения физико-математических наук с

14 января 1928 г., академик по Отделению физико-математических наук (математическая физика) с 12 января 1929 г.

Заслуженный деятель науки УССР (1939). В 1902 окончил Петербургский горный институт, с 1912 профессор там же. С 1922 руководитель кафедры математической физики АН УССР. Основные труды относятся к интерполяции, приближённому интегрированию дифференциальных уравнений математической физики, нелинейной механике. Совместно со своим учеником Н.Н.Боголюбовым развил метод символического решения задач математической физики на основе операционного исчисления Хевисайда. Разработал ряд новых методов решения задач математической физики, которые нашли применение как для доказательства существования решений, так и для фактического их построения. Цикл исследований совместно с Н. Н. Боголюбовым (с 1932) посвящен изучению актуальных проблем нелинейных колебательных процессов, где Крылову удалось заложить основы нелинейной механики.

Н.М. Крылов – чл.- корр. Кэмбриджского университета (1924), чл. Американского математического общества (1924), Французского физического общества (1924), Итальянской математической ассоциации (1924), Французского математического общества (1924), Математического общества в Палермо (1924). Награждён орденом Ленина (1949), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1944, 1945).

В 1964 в АН УССР учреждена премия имени Н.М. Крылова.

Андронов
Александр Александрович
(1901-1952)

Советский физик и механик, академик АН СССР (1946). Окончил МГУ. Ученик и ближайший сотрудник Л. И. Мандельштама. Профессор Горьковского университета (1931). Андронов первый (1928) указал эффективный математический аппарат для рассмотрения задач теории нелинейных колебаний. С помощью этого аппарата Андронов создал основы строгой теории автоколебаний – колебаний, период которых определяется параметрами самой системы, и сделал многое для её дальнейшего становления и развития. Распространил развитые им методы теории нелинейных колебаний на проблемы автоматического регулирования, решил ряд важных нелинейных задач теоретической радиотехники и важных практических задач в области регулирования и общей динамики машин. В 1937 опубликовал классическую монографию «Теория колебаний» (совместно с А. А. Виттом и С. Э. Хайкиным). Создал школу специалистов в области нелинейных колебаний и смежных проблем. Депутат и член Президиума Верховного Совета РСФСР 2-го созыва, депутат Верховного Совета СССР 3-го созыва.

В 1969 году Академия наук СССР учредила премию А.А.Андронова.

Четаев
Николай Гурьевич
(1902—1959)

Н. Г. Четаев — крупный советский учёный в области аналитической механики, теории устойчивости движения и качественных методов теории дифференциальных уравнений.

В 1920 г. Четаев поступил на математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета и ещё студентом опубликовал свою первую научную работу “Дифракция света в непрозрачных средах”.

Выдающиеся способности и трудолюбие Четаева привлекли к нему внимание университетских профессоров. В 1926 г. он поступил в аспирантуру по кафедре механики под руководством известного математика и механика профессора Д. Н. Зёйлигера, которую закончил в 1929 г. За время аспирантуры он выполнил и опубликовал ряд исследований по устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкой массы, уравнениям динамики и другим сложным проблемам механики.

В 1929 г. Четаев был командирован на один год в Германию для работы в Гёттингенском университете, где участвовал в семинарах знаменитого немецкого учёного Л. Прандтля и вместе с тем продолжал свой собственные исследования в области устойчивости движения. По возвращении из Германии в начале 1930 г. он был назначен доцентом Казанского университета, а в сентябре 1930 г. — профессором и заведующим кафедрой механики физико-математического факультета.

В 1931 г. при Казанском университете было создано аэродинамическое отделение, которое почти сразу было реорганизовано в Казанский авиационный институт, где Четаев исполнял обязанности заместителя директора. После укрепления основных кафедр института он возвратился в Казанский университет.

В 30-х годах в Казани научным центром, объединявшим механиков и многих математиков университета и авиационного института, был организованный Четаевым семинар, в котором рассматривались главным образом проблемы устойчивости движения, аналитической динамики и качественных методов в теории дифференциальных уравнений. Работа семинара явилась основой того направления в механике, которое стали называть Казанской школой теории устойчивости. В трудах семинара получили дальнейшее развитие методы А. М. Ляпунова и было вскрыто их прикладное значение. Дальнейшее развитие науки и техники показало, насколько важными были работы в этой новой области механики.

В 1940 г. Четаев перешёл на работу в Академию наук СССР. Он переехал в Москву и стал руководителем отдела общей механики в Институте механики АН СССР, ас 1945 по 1953 г. — его директором. Как и в Казани, Четаев руководил семинарами в Институте механики и Московском университете. Его новое направление в механике широко проникло в различные области техники.

В последние годы жизни Четаев заведовал кафедрой теоретической механики Московского университета. С 1945 г. до конца жизни он был ответственным редактором журнала “Прикладная математика и механика”.

Значительное место в творчестве Четаева занимала аналитическая механика. Ещё в студенческой работе он применил принцип Гаусса к решению задачи о том, по какой из возможных ветвей равновесия будет следовать масса вращающейся жидкости в окрестности точки бифуркации. В последующих работах, обобщив понятие о связях, которое в свою очередь потребовало нового, наиболее общего определения возможных перемещений, Четаев показал, что принцип Гаусса вытекает из принципа Даламбёра — Лагранжа, если последний ввести как следствие аксиомы определения гладких связей. Определение возможных перемещений по Четаеву получило всеобщее признание.

Большое значение имеют его работы по уравнениям движения в групповых переменных, которые были введены в механику А. Пуанкаре. Четаев преобразовал уравнения Пуанкаре в каноническую форму и доказал для них обобщения классических теорем Гамильтона и Якоби, исследовал вопрос о построении группы возможных и действительных перемещений, когда связи заданы в дифференциальной форме, показал возможность решения уравнения типа Гамильтона — Якоби в более общих функциях, чем функция действия.

Эти работы во многом определили направление исследований по динамике механических систем в групповых переменных.

Постановка вопроса об устойчивых траекториях динамики привела Четаева к “постулату устойчивости”, т. е. к необходимости признания устойчивости того или иного рода в силу требований малых отклонений теории от эксперимента, справедливость которого он показал на конкретных законах физики.

Большой и важный цикл работ Четаева связан с исследованием общих свойств возмущённых движений механических систем в окрестности устойчивого невозмущённого движения. Результаты этих исследований позволили ему существенно продвинуть решение задачи о развитии оптико-механической аналогии в рамках аналитической динамики.

Фундаментальное значение, как теоретическое, так и практическое, в смысле приложения ко многим проблемам современной техники имеют работы Четаева по теории устойчивости движения, в особенности его знаменитая теорема обращения теоремы Лангранжа об устойчивости равновесия при максимуме силовой функции. Большой цикл работ он посвятил исследованию устойчивости неустановившихся движений по первому приближению, разработке приёма построения функции Ляпунова в виде квадратической формы с переменными коэффициентами, а также в виде линейной комбинации интегралов уравнений возмущённого движения. Наиболее важные результаты своих исследований Четаев изложил в ставшей классической монографии “Устойчивость движения” (1946, 1955, 1962).

В работах Четаева по качественным методам анализа получили развитие аналитические методы исследования поведения траекторий динамических систем. Ряд его работ посвящён выяснению алгебраической природы метода Ляпунова и задачам об оценках приближённого интегрирования, которые, как он показал, имеют много общего с задачами об устойчивости движения. Методы Ляпунова — Четаева имеют большое прикладное значение. Они применяются в теории регулирования, управления летательными аппаратами, в приборостроении, в подводном плавании. Решению прикладных задач посвящён целый цикл работ Четаева. Он решил задачу об устойчивости вращательного движения сплошного снаряда и снаряда с полостью, заполненной идеальной жидкостью, а также полёта снаряда по весьма настильной траектории.

Правительство и научная общественность высоко оценили деятельность Четаева. В 1940 г. ему было присвоено звание Заслуженного деятеля науки Татарской АССР, в 1943 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, награждён орденами СССР и посмертно удостоен Ленинской премии.

Королев
Сергей Павлович
(1907-1966)

КОРОЛЕВ Сергей Павлович (1906/07-1966), российский ученый и конструктор, академик АН СССР (1958), дважды Герой Социалистического Труда (1956, 1961). Под руководством Королева созданы баллистические и геофизические ракеты, первые искусственные спутники Земли, спутники различного назначения («Электрон», «Молния-1», «Космос», «Зонд» и др.), космические корабли «Восток », «Восход », на которых впервые в истории совершены космический полет человека и выход человека в космос. Ленинская премия (1957). Репрессирован в 1938-44; находился в заключении на Колыме (1938-40); затем работал в КБ в Москве (1940-42) и Казани (1942-44).

КОРОЛЕВ Сергей Павлович [31 декабря 1906 (12 января 1907), Житомир — 14 января 1966, Москва], российский ученый и конструктор, организатор ракетной и космической программ, основоположник практической космонавтики; действительный член АН СССР (1958), дважды Герой Социалистического Труда (1956, 1961), лауреат Ленинской премии (1957) и Золотой медали им. К. Э. Циолковского АН СССР (1958).

Родился в семье учителя Павла Яковлевича Королева, из разночинцев. Из-за распада семьи с двух до десяти лет воспитывался в Нежине под Киевом в большой купеческой семье родителей матери, Н. Я. Москаленко. С 1917 жил с отчимом и матерью, Григорием Михайловичем и Марией Николаевной Баланиными, в Одессе, где с их помощью дома изучал школьную программу, а в 1922-24 учился в строительной профессиональной школе, занимаясь во многих кружках и на разных курсах.

В 1921 познакомился с летчиками гидроотряда и активно участвовал в авиационной общественной жизни: с 16 лет как лектор по ликвидации авиабезграмотности, а с 17 — как автор проекта безмоторного самолета К-5, официально защищенного перед компетентной комиссией и рекомендованного к постройке.

В 1924-26 учился в Киевском политехническом институте. В 1926 перевелся в Московское высшее техническое училище, где участвовал в организации первой в стране планерной школы, окончив ее, стал инструктором и испытателем планеров, также окончил школу летчиков, занимался в аэродинамическом кружке им. Н. Е. Жуковского, где разрабатывал оригинальные планеры и легкие самолеты. С четвертого курса совмещал учебу с работой в конструкторских бюро (КБ). С 1927 четыре года подряд участвовал во Всесоюзных планерных состязаниях в Коктебеле, в 1929 представил там свой первый планер-паритель СК-1 «Коктебель», на котором сам же показал наибольшую продолжительность полета — 4 час. 19 мин. Тогда же, в 1929, посетил в Калуге К. Э. Циолковского, чтобы проконсультироваться по вопросу полета планера на сверхдальность, но ученый посоветовал Королеву заняться решением проблемы космического полета. В качестве напутствия Циолковский подарил энтузиасту авиации свою последнюю книгу «Космические ракетные поезда» и порекомендовал обратиться к инженеру Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ) Ф. А. Цандеру.

В феврале 1930 Королев успешно защитил дипломный проект легкого самолета СК-4 (руководителем был А. Н. Туполев). В это время самолет уже строился, но из-за отсутствия надежного легкого авиадвигателя разбился при испытаниях, не успев показать ожидаемой рекордной дальности. Параллельно Королев конструировал еще один рекордный аппарат, рассчитанный «на все случаи жизни», — планер СК-3 «Красная звезда», на котором в октябре 1930 впервые в мире были выполнены петли Нестерова в свободном полете. Сам Королев не смог осуществить этот полет из-за тифа, который дал тяжелое осложнение (временная глухота и расстройство памяти). После болезни он был вынужден записывать каждый намечаемый шаг, несмотря на то что до заболевания обладал феноменальной памятью.

С марта 1931 Королев начал работать старшим инженером по летным испытаниям в ЦАГИ, где летал вместе с М. М. Громовым, занимаясь, в частности, отработкой первого отечественного автопилота. Но главным событием во время его работы в ЦАГИ можно считать встречу с Цандером, который еще в сентябре 1930 начал программу огневых испытаний своего лабораторного ракетного двигателя ОР-1. Королев активно включается в совместную работу.

В августе 1931 Королев женился на своей бывшей однокласснице К. М. Винцентини, ставшей врачом. В 1935 у них родилась дочь Наталья, но брак оказался неудачным.

В сентябре 1931 в системе Осоавиахима создается Группа изучения реактивного движения (ГИРД) во главе с Цандером, в задачи которой входили разработка и испытание экспериментального ракетоплана РП-1 с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД) ОР-2. В качестве исходного аппарата Королев предложил использовать бесхвостый планер Б. И. Черановского, который он предварительно всесторонне изучил в полете.

В ГИРД устремились энтузиасты со всей Москвы и других городов. Московская ГИРД стала называться Центральной, а Королев возглавил ее научно-технический совет. ЦГИРД рассматривала поступающие проекты, распределяла заказы, поступавшие от Осоавиахима и Вооруженных сил. В марте 1932 на совещании у начальника вооружений РККА М. Н. Тухачевского Королев, доложив программу работ ГИРД, получил одобрение видного военачальника, было решено создать специальный научно-исследовательский институт по этой проблематике. С этого времени Королев уделял разработке ракетного оружия первостепенное внимание, понимая, что укрепление обороноспособности страны является непременным условием и для выполнения программ использования ракетной техники в мирных целях. Начал работать в тесном контакте с руководителем ленинградской Газодинамической лаборатории Б. С. Петропавловским. Королев приступил к организации своего первого КБ, которое сформировал из членов ЦГИРД. Это КБ, сохранившее название ГИРД, вошло в историю ракетостроения.

Здесь проектно-конструкторскими бригадами Цандера, М. К. Тихонравова, Ю. А. Победоносцева и самого Королева было положено начало большинству направлений ракетостроения для ускорения практического результата Королев организовал разработку простейшей во всех отношениях ракеты на жидком топливе. 17 августа 1933 первая советская жидкостная ракета ГИРД-09 достигла высоты 400 м, что являлось принципиальным достижением (в довоенный период полеты жидкостных ракет удалось осуществить только в США и Германии). Этот полет доказал, что ракетная техника — не фантастика, а реальность.

Итоги первых шагов ракетостроения Королев подвел в своей книге «Ракетный полет в стратосфере» (1934), в которой осветил реальные некосмические возможности применения ракет в научных и военных целях.

В сентябре 1933 был основан первый в мире Реактивный институт, заместителем директора которого был назначен 26-летний Королев. Гирдовцы надеялись, что в новом институте станет возможным перейти от небольших экспериментальных ракет к действительно серьезным проектам. Но Реактивный НИИ подчинялся управлению боеприпасов Наркомата тяжелой промышленности, заинтересованному в разработке ракетных снарядов, его финансирование было на низком уровне, а тематика даже сократилась (были исключены работы по ракетоплану). Королев, оставшись без поддержки умерших один за другим Цандера и Петропавловского, не смог противостоять политике руководства и уже в январе 1934 был освобожден от занимаемой должности. Ряд гирдовцев покинул институт, но Королев, сознавая, что это единственное научное учреждение, где можно работать над проблемами ракетной техники, остался. Работая в ранге рядового инженера, сосредоточил все усилия на создании крылатых ракет. Кроме того, он участвовал в работе Стратосферных комитетов Осоавиахима и АвиаВНИТО, выступил с докладами по проблеме полета человека на ракетных аппаратах на Всесоюзных конференциях по изучению стратосферы в 1934 и 1935. Чтобы ускорить создание экспериментального ракетоплана, с помощью Осоавиахима построил тяжелый двухместный планер-паритель СК-9, который сначала прошел все летные испытания, включая полет в Коктебель и обратно на буксире за самолетом для участия в планерных состязаниях (1935), а затем был использован для опытов с ЖРД.

Подтверждение на практике РНИИ преимуществ методов и конструкций, разработанных в ГИРД, привело к организации в начале 1936 специального отдела РНИИ по разработке ракетных летательных аппаратов, главным конструктором которого был назначен Королев.

Энциклопедические знания, системный подход, редкая интуиция и немалый опыт уже тогда позволяли Королеву применять самые выгодные для данного случая конструктивные схемы аппарата, типы двигателей и систем управления, виды топлив и материалов. В результате в его отделе к 1938 была разработана экспериментальная система управляемого ракетного оружия, включающая проекты жидкостных крылатой 212 и баллистической 204 ракет дальнего действия с гироскопическим управлением, авиационных ракет 201 для стрельбы по воздушным и наземным целям, зенитных твердотопливных ракет 217 симметричной и самолетной аэродинамических схем с наведением по световому и радиолучу. Стремясь получить поддержку военного руководства и в разработке высотного ракетоплана 218, Королев впервые в мире обосновал концепцию ракетного истребителя-перехватчика, способного в несколько минут достигать большой высоты и атаковать самолеты, прорвавшиеся к защищаемому объекту.

Для получения опытных данных, необходимых при создании РПИ-218, планер СК-9 был переоборудован в простейший ракетоплан РП-218-1, огневые испытания которого Королевым проводились, начиная с декабря 1937. В мае1938 им была разработана программа летных испытаний, которые он намеревался провести лично. Но из-за аварии при испытаниях ракеты 212, получив ранение головы, он попал в больницу, а когда выписался из нее, 27 июня 1938 был арестован по печально знаменитой 58-й статье как участник контрреволюционной троцкистской организации внутри РНИИ (ранее по «делу РНИИ» подверглись аресту И. Т. Клейменов, Г. Э. Лангемак, В. П. Глушко). Королев был приговорен к 10 годам заключения, наказание отбывал на Колыме.

После ареста маршала Тухачевского все разработки нового оружия постепенно закрывались и сопровождались арестами их авторов. Тем не менее исследования Королева по ракетоплану были продолжены, хотя не так интенсивно, как при нем. В феврале 1940 летчик В. П. Федоров совершил на РП-218-1 первый в СССР полет с работающим ЖРД, положивший начало практическому развитию отечественной реактивной авиации. После этого Наркомат авиапромышленности рекомендовал продолжить разработку реактивных самолетов другим конструкторам (В. Ф. Болховитинову, А. Г. Костикову и др.), но без участия Королева создание боевого ракетного самолета оказалось невозможным.

В сентябре 1940 Королев благодаря ходатайству Туполева (хотя тот сам подвергся аресту в 1938) был вызван с Колымы для разработки в ЦКБ-29 нового бомбардировщика. Королев сразу же занялся разработкой крыла самолета и, кроме того, представил в НКВД проектные предложения по созданию для него ракетной аэроторпеды АТ, которая позволяла бы наносить удары, не входя в зону ПВО. После того как в декабре 1941 самолет совершил первый успешный полет, коллектив Туполева был эвакуирован в Омск, где он организовал в спешно построенных цехах серийное производство самолета, получившего название Ту-2 и ставшего впоследствии лучшим фронтовым бомбардировщиком. Королева решено было направить в Казань в КБ тюремного типа (так называемая шарашка) для того, чтобы найти применение разработанному Глушко ЖРД с тягой 300 кг. Королев предложил ряд вариантов, из которых был выбран проект авиационной ракетной установки (АРУ), обеспечивающей кратковременное увеличение скорости боевых самолетов. Для первого опыта был взят пикирующий бомбардировщик Пе-2, для которого в январе 1943 началась разработка АРУ-1, в марте около 900 чертежей ее деталей и систем были сданы в производство, а 1 октября был осуществлен первый полет Пе-2рд с включением ЖРД на 2 минуты, за которые скорость самолета возросла на 120 км/час. В результате отработки установка получила высокую оценку. Королев за эту работу был награжден орденом «Знак Почета» и освобожден от отбывания наказания.

В конце войны Королевым были разработаны проекты РДД Д-1 и Д-2 с твердотопливными двигателями, он также выдвинул предложения по созданию перспективных жидкостных ракет. Но поскольку оказалось, что подобные проекты уже были осуществлены в Германии, Королев был направлен в составе группы советских специалистов на немецкие предприятия, где ему было поручено собрать для испытаний хотя бы несколько ракет Фау-2. Ознакомившись с тем, что осталось от ракетного центра Пенемюнде, подземного завода Нордхаузен, Королев пришел к выводу, что можно создать и свои отечественные ракеты с существенно лучшими характеристиками.

В мае 1946 советским руководством было принято постановление о развитии ракетостроения в СССР, в соответствии с которым в советской оккупационной зоне был создан Институт Нордхаузен, где под руководством Королева был осуществлен полный проект РДД Фау-2 (А-4), подготовлены предложения по созданию ракет с большей дальностью, а также составлены специальные железнодорожные поезда для проведение летных испытаний ракет в период до создания стационарного полигона.

Но главным содержанием этого постановления было решение о создании в подмосковном Калининграде (ныне Королев) Государственного союзного НИИ реактивного вооружения (НИИ-88), одним из главных конструкторов которого был назначен Королев.

Дальнейшие события развивались стремительно: в апреле 1947 Королев, докладывая свои предложения по разработке РДД Сталину, получил от него указание сделать копию немецкой ракеты, что стало хорошей школой и для промышленности, и для армии. После этого можно было переходить к реализации своих идей; в октябре у Капустина Яра провел летные испытания ракет А-4, собранных в институтах Нордхаузен и НИИ-88 в основном из трофейных узлов и агрегатов; в 1948 с гораздо лучшими результатами по надежности и точности попадания испытал первые ракеты Р-1, воспроизводящие А-4 по отечественной документации и из своих материалов. Королев показал себя незаурядным организатором, сумев скоординировать работу созданного им Совета главных конструкторов (В. П. Бармин — наземный комплекс, Глушко — ЖРД, В. И. Кузнецов, Н. А. Пилюгин, М. С. Рязанский — системы управления), министерства вооружения (Д. Ф. Устинов), военных подразделений (маршал артиллерии М. И. Неделин), коллективов НИИ-4 в Болшеве и Государственного центрального полигона Капустин Яр.

В мае 1947 познакомился с Ниной Ивановной Котенковой, работавшей в НИИ-88 переводчицей. Вскоре она стала его женой и фактически единственным другом в жизни.

Благодаря созданию ракеты с дальностью 300 км, которая во всем мире признавалась «чудом техники», Королев открыл дорогу для воплощения на практике своих технических идей. В 1948 была создана ракета Р-2 с дальностью 600 км, которая могла уже достигать, например, некоторых американских авиационных и морских баз.

Параллельно с отработкой на надежность и сдачей на вооружение ракет Р-1 и Р-2, Королев развернул широкомасштабные межведомственные проектно-теоретические научно-исследовательские работы по нескольким перспективным направлениям, в которых ОКБ играло роль головного предприятия.

В результате появилась РДД Р-5М с дальностью 1200 км, оснащенная ядерной боевой частью. 2 февраля 1956 на Семипалатинском полигоне были успешно проведены испытания этой первой в мире стратегической ракеты.

Королевым активно велись поиски путей создания ракет на долго хранящемся жидком топливе, поскольку применение быстро испаряющегося жидкого кислорода было крайне неудобно в боевой эксплуатации. Их результатом стала ракета Р-11 с ЖРД А. М. Исаева, которая могла решать те же задачи, что и Р-1, но была втрое легче, что открыло возможность создания мобильных сухопутного Р-11М и морского Р-11ФМ ракетных комплексов (в сентябре 1955 состоялся первый в СССР пуск ракеты с подводной лодки). Им был также разработан предэскизный проект стратегической ракеты на долго хранящемся топливе Р-12, совмещающей в себе совершенство Р-5М и удобство в эксплуатации Р-11. Этот проект был передан Королевым на «Южмаш» в Днепропетровск, где возникло новое ОКБ по стратегическим ракетам во главе с М. К. Янгелем.

Основное королевское направление было связано с проблемами создания многоступенчатых ракет, достигающих межконтинентальной дальности. Первая межконтинентальная баллистическая ракета (МБР) Р-7, уникальная и по конструкции, и по летным характеристикам, была вскоре создана, при стартовой массе 283 т она была способна доставлять на расстояние 8 тыс. км головную часть массой 5,4 т с термоядерным зарядом мощностью 3-5 Мт.

После многих удачных стартов с января 1959 боевая стартовая станция в районе Плесецка Архангельской области, вооруженная четырьмя стационарными установками для пуска МБР Р-7, заступила на боевое дежурство. Вскоре с нее стали запускать модернизированные МБР Р-7А с дальностью 12 тыс. км.

Создав Р-7 и на ее основе космические ракеты-носители, Королев надеялся целиком сосредоточиться на космической технике, но жидкостные МБР по эксплуатационным качествам все-таки проигрывали американским твердотопливным ракетам. Королев, обратившись к этой проблематике, создал экспериментальную твердотопливную ракету РТ-1, достигшую на испытаниях 1962 дальности 2,5 тыс. км. В феврале 1966 была испытана твердотопливная МБР РТ-2, которая в дальнейшем использовалась по 15-17 лет. В настоящее время все новейшие российские стратегические ракетные комплексы оснащаются только твердотопливными ракетами, являющимися наследницами по прямой королевской МБР РТ-2.

Разработка оружия, обеспечившего мирное сосуществование, была для Королева не самоцелью, а лишь условием для начала освоения космоса.

Еще в 1935 Королев писал о том, что если будет «процветание ракетного дела, то будет и то время, когда первый земной корабль впервые покинет Землю». Но работа над космической темой, начавшаяся с высотных ракетных запусков, стала возможной только в конце 1940-х — начале 1950-х гг. В мае 1954 сразу же после принятия постановления правительства о разработке МБР Р-7, которая по замыслу Королева должна была стать первой космической ракетой-носителем (РН), он направил Устинову докладную записку о возможности и необходимости разработки и запуска с помощью этой ракеты искусственных спутников Земли. В этом документе в кратком виде была намечена дальнейшая программа освоения околоземного космического пространства, включая полеты на Луну.

Вслед за этим Королев еще не раз направлял в правительственные и академические инстанции предложения о необходимости начать разработку спутников, но ответа на них не было, и ему пришлось заняться проектированием спутника на собственный страх и риск. Лишь после того, как в январе 1956 ОКБ-1 посетил Н. С. Хрущев, оставшийся очень довольным ходом работ над стратегическими ракетами, Королев обратился к нему с просьбой разрешить работы по спутнику. Хрущев одобрил эту инициативу при условии, если она не задержит разработку МБР. Вскоре было принято решение о создании в 1957-58 на базе разрабатываемой ракеты Р-7 неориентированного искусственного спутника Земли (объект Д) массой до 1400 кг с комплексом научной аппаратуры. Но еще до начала летных испытаний ракеты Королев выдвинул предложение использовать их для запуска простейших спутников весом около 50 кг с минимумом приборов, что и позволило опередить США в разрекламированном ими проекте запуска мини-спутников.

4 октября 1957 впервые в истории человечества был запущен искусственный спутник Земли: сверхмощная ракета, преодолев земное тяготение, разогналась до скорости 8 км/с и стала обращаться вокруг Земли как самостоятельное небесное тело, после чего от нее отделился шарообразный

спутник, наблюдать и принимать сигналы которого мог весь мир. Это был рубеж в истории человечества: первый период до спутника, второй — после спутника. И хотя первый длился более 40 тысячелетий, а второй продолжается немногим более 40 лет, качественное состояние нашей цивилизации уже изменилось, причем не только в мировоззренческом философском плане, но и практически, в первую очередь, благодаря глобальным информационным системам связи и наблюдательным спутниковым системам.

Имевшийся технический задел и опыт ракетных исследований позволил Королеву менее чем за месяц создать и в ноябре 1957 запустить второй спутник с собакой Лайкой на борту. Этот эксперимент доказал, что длительная невесомость не смертельна для живых существ. Реальностью становился полет человека в космос.

Спроектированная с большими запасами грузоподъемности двухступенчатая ракета Р-7 позволила при установке на нее третьей ступени выводить на орбиту полезный груз в 4,6 т, а при установке четвертой ступени выводить на межпланетные траектории до 1,2 т. Для этого пришлось решить множество проблем, в частности, разработать способы ориентации и стабилизации аппаратов в космическом пространстве и запуска ЖРД в пустоте и невесомости. Благодаря этому были открыты возможности для исследований Луны и планет с помощью автоматических межпланетных станций, запуска спутников на высокоапогейные орбиты (36 тыс. км и более), для создания космических кораблей с достаточно большими запасами надежности, обеспечивающими высокую степень безопасности полета человека.

12 апреля 1961 был осуществлен исторический полет Ю. А. Гагарина. В реализации первых полетов человека с помощью ракеты-носителя «Восток» непосредственно участвовало 123 предприятия 32 различных министерств и ведомств СССР, но главными создателями были, конечно, люди: уже упоминавшиеся члены созданного Королевым Совета главных конструкторов и пополнившие его: А. М. Исаев и С. А. Косберг (двигатели), А. Ф. Богомолов (радиотелеметрическая система), С. М. Алексеев (скафандр и системы

катапультирования), Г. И. Воронин (системы жизнеобеспечения), Ф. Д. Ткачев (парашютные системы), В. И. Яздовский (медико-биологическое обеспечение полета). В ОКБ-1 ведущими разработчиками ракеты-носителя и космического корабля «Восток» были: К. Д. Бушуев, Л. А. Воскресенский, В. П. Мишин, М. К. Тихонравов и др.

Чтобы все системы сработали безотказно и не подвели десятки тысяч производственников, изготавливавших всю технику, и военных ракетчиков-испытателей, осуществлявших подготовку и пуск «Востока» на космодроме Байконур, Королевым были приняты беспрецедентные научно-технические, организационно-контрольные, экономические, воспитательные и психологические меры. Еще семь осуществленных при жизни Королева полетов пилотируемых космических кораблей были выполнены успешно.

Всего за восемь лет начала космической эры под непосредственным руководством Королева были запущены два простейших спутника (ПС), первая космическая научная станция (объект Д), две первых космических системы «Электрон», состоявших каждая из двух спутников-станций, выводимых одной РН на существенно различные орбиты для одновременного исследования радиационной обстановки в разных областях околоземного космоса, первые спутники прикладного хозяйственного и оборонного назначения: связные «Молния-1» и фоторазведчики «Зенит-2». Первые из них получили дальнейшее развитие в Красноярском, а вторые — в Куйбышевском филиалах ОКБ-1, которые под руководством заместителей Королева М. Ф. Решетнева и Д. И. Козлова выросли в крупнейшие центры российской космической промышленности.

Королев возглавлял работу по запуску 15 первых в мире станций для исследования межпланетного пространства, Луны, Венеры и Марса, причем благодаря Королеву на дальнейшее развитие этого исключительно мирного направления было переведено одно из крупнейших оборонных предприятий — авиастроительное НПО им. С. А.Лавочкина. Ему также принадлежит лидерство в осуществлении первых в мире полетов многоместных космических кораблей

«Восход» и «Восход-2» (из которого 18 марта 1965 человек в первые вышел в открытый космос). Затем были разработаны многоцелевой трехместный космический корабль «Союз», корабль для облета Луны Л-1, лунный экспедиционный комплекс Н1-ЛЗ, предэскизные проекты тяжелой орбитальной станции «Звезда» и тяжелого межпланетного корабля. Дальнейшее осуществление советской космической программы Королев планировал на основе сверхтяжелой ракеты-носителя Н-1, испытания которой после его смерти и первых неудачных полетов в 1969-72 были свернуты по политическим причинам. Объем осуществленных и задуманных Королевым проектов не может вместить одна человеческая жизнь, а Главному конструктору Богом было отпущено немного.

Безвременная кончина Королева (остановилось сердце после хирургической операции) явилась подлинной трагедией как для отечественной, так и мировой космонавтики, в результате чего постепенно снизились темпы развития всех космических программ. Как показало дальнейшее развитие космонавтики, равной ему по масштабу личности так и не появилось ни в России, ни в США. Тем не менее и сегодня продолжаются научные программы исследования космоса, его обживание с помощью долговременных орбитальных комплексов. Все это — убедительное свидетельство исторической значимости и непреходящей ценности деятельности Королева, который верил, что «космонавтика имеет безграничное будущее, ее перспективы беспредельны, как сама Вселенная».

Келдыш

Мстислав Всеволодович

(1911 – 1978)

КЕЛДЫШ Мстислав Всеволодович (1911 – 78), российский математик и механик, академик АН СССР (1946), президент АН СССР (1961-75), трижды Герой Социалистического Труда (1956, 1961, 1971). Сын В. М. Келдыша, брат Ю. В. Келдыша.

Родился в Риге, в 1931 году окончил Московский университет. Работал в Централ аэрогидродинамическом институте, а с 1937 профессор Московского университета. С 1957 директор института прикладной математики СССР.

В истории ракетостроения и освоения космического пространства рядом с именем С.П.Королева Главного конструктора - заслуженно стоит имя М.В.Келдыша - Главного теоретика космонавтики.

Научные исследования Келдыша охваты широкий круг проблем гидроаэродинамики и прикладной математики.

Фундаментальные труды по математике (теории функций комплексного переменного, функциональному анализу и др.) аэрогидродинамике, теории колебаний. Разработал теорию Флаттера самолета, создал методы численного расчета флаттера и его моделирования в аэродинамической трубе, а также методы борьбы с флаттером. Изучил явления шимми самовозбуждающихся колебаний носового колеса шасси самолета и нашел средства для его устранения.

Келдыш обобщил теорему Жуковского о подъемной силе, разработал теорию колеблющегося крыла и теорию винта.

Исследовал многие пробле66мы авиационной и атомной техники, вычислительной и машинной математики. Руководил рядом советских космических программ, включая полеты человека в космос. Ленинская премия (1957), Государственная премия СССР (1942, 1946). Золотая медаль имени Ломоносова АН СССР (1976).

Оглавление

Учебное издание

Блохин Валерий Николаевич
Старовойтов Сергей Иванович
Лапик Владимир Павлович

СПРАВОЧНИК ПО ТЕОРИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Редактор Павлютина И.П.

Подписано к печати 14.06.2012 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Усл. п. л. . Тираж 100 экз. Изд. № 2186.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365 Брянская обл., Выгоничский район, с. Кокино, Брянская ГСХА